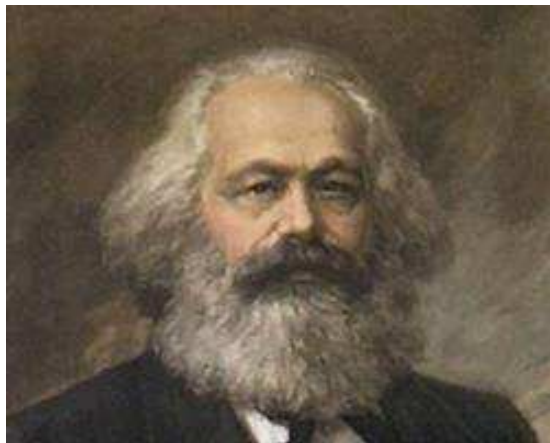


ASPECTOS DE LA ECONOMÍA DE CARLOS MARX

(CRÍTICA SOBRE LOS FUNDAMENTOS)

MARX'S ECONOMIC
(a fundamental critical)



Carlos Marx

por

Antonio Mora Plaza

(antonioamora@hotmail.com)

Índice:

I - SOBRE LA TEORÍA DEL VALOR-TRABAJO Y DE LA PLUSVALÍA EN MARX.

II - MORISHIMA Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL MARXIANO (TEORÍA DE LA EXPLOTACIÓN).

III - TRANSFORMACIÓN DE VALORES A PRECIOS.

IV - REPRODUCCIÓN SIMPLE DE MARX A LA LUZ DE SRAFFA.

V - TEORÍA DE LA REPRODUCCIÓN Y ACUMULACIÓN DE MARX A PARTIR DE SRAFFA

Apéndice I: generalización a la producción conjunta no *esrafiana*.

Apéndice II: tasa de plusvalía, de ganancia y composición orgánica

Apéndice III: reproducción simple y tasa máxima de ganancia

Apéndice IV: los problemas de la tasa de plusvalía

Apéndice V: Marx desde Sraffa

Apéndice VI: Marx, Sraffa y el uso de las matemáticas

Bibliografía

ASPECTOS DE LA ECONOMÍA DE CARLOS MARX

I - SOBRE LA TEORÍA DEL VALOR-TRABAJO Y DE LA PLUSVALÍA EN MARX.

Comienzo con una acotación: sólo trato de algunas cuestiones que escribió Marx como economista, entendida la economía como el conocimiento que surge de tratar la actividad humana encaminada (aunque sea no elegida, aunque sea forzosa) a producir bienes y servicios. No acepto el principio de que sea para satisfacer necesidades, ni de que los medios empleados sean de usos alternativos (*Lionnel Robins*). Eso da igual. En tiempos de guerra se trabaja en el armamento y maldita satisfacción tiene eso. Y en cuanto a los usos alternativos, si no existen, no por eso deja de ser un trabajo esa actividad, no por eso deja de producir bienes (o males) y servicios y a generar una renta. Eso, a los obreros, asalariados, autónomos, etc., les da igual. Pero esto era una digresión. Viene a cuento para acotar a Marx, porque esa es la única manera de abordar todo el legado del revolucionario alemán. Y como economista, también se ha de ser selectivo, forzosamente, pero a cambio de ser profundo. O al menos intentarlo. Porque Marx es un economista, además de ser marxista, ideólogo, historiador, político, filósofo, periodista, revolucionario, etc. Y como economista no hay otra manera de empezar con Marx que darle el primer turno a la teoría del valor-trabajo, guste o -como es mi caso- no guste.

Esta teoría es distinta de la de D. Ricardo. Dice el economista inglés que para *“poseer utilidad los bienes obtienen su valor de dos fuentes: de su escasez y de la cantidad de trabajo requerida para obtenerlos”*¹. Más tarde añade a ello una consideración que Piero Sraffa aprovechará para la consideración del capital como trabajo fechado: *“El valor de los bienes no sólo resulta afectado por el trabajo que se le aplica de inmediato, sino también por el trabajo que se empleó en los instrumentos, herramientas y edificios con el que se complementa el trabajo inmediato”*². Esta última cita es el título de un epígrafe, por lo que no caben matizaciones. Marx, con su agudeza habitual, se dio cuenta enseguida de que esta definición o

¹ *Principios de Economía Política y Tributación*, FCE, pág. 9

² *Principios de Economía Política y Tributación*, FCE, pág. 17

consideración (¿o ley?) del trabajo tenía un defecto insoslayable: si era verdad, cuanto más vago e inexperto sea el trabajador, más tiempo tardará en llevar a cabo el trabajo y ¡valdrá más lo que produce! Quizá Ricardo pensaba más en trabajos autónomos, agrícolas, etc. propios de una sociedad primitiva. De hecho, el ejemplo que pone en su libro es el ya famoso cazador. La paradoja de la agregación ha perseguido a los economistas siempre. Marx, escribiendo exactamente 50 años más tarde³, ya piensa en el *trabajado asalariado* organizado en empresas y cambia la consideración de Ricardo y dice que “*la magnitud de valor de un objeto no es más que la cantidad de trabajo socialmente necesario, o sea, el tiempo socialmente necesario para su producción*”⁴. Pero 20 años antes, en *Miseria de la Filosofía*, Marx da el siguiente criterio de formación del valor: “*El valor no es el tiempo en el cual una ha sido producida, sino el mínimo de tiempo en el cual es susceptible de ser producida, y este mínimo se atestigua por la competencia*”⁵. El valor para Marx es una especie del trabajo que por término medio -dada la competencia- es necesario para fabricar un objeto (mercancía). A más competencia puede haber igual valor, pero más producción. Al menos eso es lo que yo interpreto leyendo a Marx, que si le despojamos de su lenguaje *hegelés* (de Hegel, claro) que dice la gran economista Joan Robinson con que está escrito *El Capital*, es diáfano. Eso no quiere decir que sea acertado. Más adelante dice Marx que: “*el obrero añade al objeto sobre el que recae el trabajo nuevo valor, incorporándole una determinada cantidad de trabajo, cualesquiera que el contenido concreto, el fin y el carácter técnico*”⁶. La realidad es el todo. Aquí está Hegel no sólo como lenguaje. Entonces cabe preguntarse: ¿La teoría del valor-trabajo es una *ley* económica o una *definición*? ¿La teoría de la tasa de plusvalía (no la plusvalía absoluta) es una ley económica o también una definición? Acepto el principio *popperiano* de la falsibilidad, es decir, que una ley aplicada o proveniente de cualquier campo del conocimiento, para ser cierta ha de poder ser falsa, de tal manera que sólo la contrastación empírica le puede dar marchamo de fenómeno regular merecedora del calificativo de ley. Popper negaba el carácter científico al marxismo y al psicoanálisis porque no podían ser falsos. Para dar respuesta a las preguntas que hacíamos sobre la teoría del valor-trabajo las podemos

³ La primera edición en alemán del I tomo de *El Capital* es de 1867.

⁴ *El Capital*, I tomo, FCE, pág. 7.

⁵ *Miseria de la Filosofía*, Ediciones Jucar, pág. 116.

⁶ *El Capital*, I tomo, FCE, pág. 150.

desdoblar a su vez en dos: ¿depende la plusvalía y la tasa de plusvalía del nivel de salarios? ¿Puede ser la tasa de plusvalía, según Marx, diferente para los diversos sectores en alguna circunstancia? A la primera pregunta contestan Seton, Okishio y Morishima con el teorema fundamental marxiano (versión Morishima) diciendo que para que “*exista un conjunto de precios y un tipo de salarios reales capaz de producir beneficios positivos, en otras palabras, para que pueda mantenerse una sociedad capitalista, es condición necesaria y suficiente que los capitalistas exploten a los trabajadores*”⁷. Yo he demostrado⁸ que en la versión de Morishima de este teorema no son válidas ni la condición necesaria ni suficiente, es decir, no hay demostración; por contra, lo que se demuestra es que puede haber salarios sin explotación y precios positivos; que a partir de un cierto nivel de salarios, estos sólo son posibles si hay explotación; Steedman recoge la demostración⁹ de que puede haber salarios y precios positivos aún con tasas de explotación negativas, aunque conceptualmente no se puede admitir la posibilidad de una tasa de explotación negativa, al menos en un contexto marxiano. A la segunda pregunta sobre si puede haber diferentes tasas de explotación según sectores, yo nunca advierto en Marx esa posibilidad, sea cual sea la longitud de la jornada de trabajo. La explotación marxiana depende -me atrevo a decir- sólo de la posibilidad del alargamiento de la jornada de trabajo *sea cual sea el nivel de salarios*. Al menos Morishima no tiene duda: “*El problema de la determinación del grado de explotación se reduce al de la duración de la jornada de trabajo*”¹⁰, lo cual es coherente con el resto de su libro. Con respecto a Marx yo no tengo dudas: leyendo el conjunto de su obra, para el alemán la tasa de plusvalía es única para todos los sectores, aunque pueda haber algún texto particular que pueda indicar lo contrario o, al menos, establecer alguna duda. Hay que tener en cuenta que para Marx sólo el trabajo crea y *transfiere* valor. Esta constancia de la tasa de plusvalía es inaceptable sea cual sea el contexto en que se establezca, incluso en un contexto de nuevo plenamente marxiano. Y menos aún que esa constancia pueda ser independiente de la tasa de salarios. Aún más dificultad se añade el hecho de que no plantee Marx *qué* fuerzas obligan o llevan a la

⁷ Marx Economics, 1973

⁸ Morishima y el teorema fundamental marxiano:
<http://www.eumed.net/ce/2010b/amp4.htm>

⁹ Marx after Sraffa, 1977.

¹⁰ Marx Economics, 1973.

constancia de la tasa de plusvalía en todos los sectores, cosa que sí hace con la tasa de ganancia. Por esta última dificultad es por lo que traíamos a colación a Popper, gran epistemólogo de la ciencia por más reaccionario que se presente y se nos presente. El criterio de Popper es aceptable, aunque no siempre sea estrictamente el laboratorio el juez de la verdad, como por ejemplo en la astrofísica. Y en las ciencias sociológicas el laboratorio son las encuestas, las estadísticas y la Historia. Por ello -al menos desde mi punto de vista-, o la tasa de plusvalía marxiana es una mera definición que no añade nada al conocimiento de la realidad social¹¹ y, en particular, del laboral, o se han de admitir tres cosas: primero, que las tasas de explotación (de plusvalía) han de ser variables según sectores (incluso según empresas); segundo, que han de depender de los salarios¹² y no sólo de la jornada de trabajo; tercero, que ha de demostrarse que existe una ley sobre esta tasa (de plusvalía) al respecto propia del sistema capitalista -objeto de análisis de Marx en *El Capital*- que no se daría en otro sistema social teórico y que no se ha dado en otros sistemas de producción del pasado.

Pero es que además hay otra dificultad insalvable para la constancia sectorial de la tasa de plusvalía. Existe una relación formal -matemática- producto de las definiciones de tasa de plusvalía, de composición orgánica de capital y de la tasa de ganancia, que lleva a que una de ellas depende de las otras dos¹³. Ocurre entonces que si mantenemos el criterio de la tendencia a la igualación -al menos como tendencia- de las tasas de ganancia en el sistema capitalista producto de la competencia y el criterio marxiano de la constancia sectorial de las

¹¹ Kant diría que es un juicio analítico a priori.

¹² Para ver porqué la tasa de plusvalía ha de depender del nivel de salarios podemos recurrir a uno de esos experimentos mentales que hacía Einstein para la Física, pero aquí en lo social. Supongamos que aumentan los salarios hasta un nivel tal que con los ingresos salariales pueden los asalariados comprar todo el excedente que se produce, es decir, que sólo se deja de cobrar lo necesario para la reproducción de los medios de producción del sistema. Las ganancias serían cero. ¿Habría en ese caso explotación? La respuesta es no porque todo el capital variable y toda la llamada plusvalía han ido a parar a los asalariados. Conclusión: la tasa de plusvalía debe depender del nivel de salarios. Si **Z** son los salarios, **X** los medios de producción, **Y** los productos finales, **L** el input de trabajo, **P** los precios y **W** los salarios, entonces, si **WL= PZ** y **X= Y-PZ**, no hay excedente y tampoco plusvalía. Si no es así se cae en una contradicción insoslayable: aunque los ingresos por salarios alcancen todo el excedente (**Y-X**), sigue habiendo tasa de plusvalía (según Marx) y la teoría de la explotación de Marx se viene abajo. En el apéndice V se amplía este punto.

¹³ Véase apéndice III.

tasas de plusvalía, ello nos da como resultado la constancia sectorial de las composiciones orgánicas de capital, lo cual es rechazable de entrada: ¿cómo pensar, por ejemplo, que las relaciones capital/trabajo son iguales en el sector del automóvil que en la recolección del trigo, en el de la construcción de obra civil o en el de los servicios bancarios? ¿Qué ley económica puede imaginarse que lleve al mismo puerto la igualdad de composiciones orgánicas a estos sectores? Ninguna, y si alguien la propusiera, la rechazaríamos por cuestiones de contrastación empírica, porque hoy sabemos que ha sectores muy intensivos en trabajo (construcción, turismo, servicios sociales) y otros en capital y tecnología (investigación, informática).

Mi opinión sobre la teoría del valor-trabajo es la de que Marx, queriendo solucionar un problema, se dio de bruces con otro que no pudo resolver. Marx vio, leyendo a Ricardo principalmente, que *el valor de las cosas no podía depender de los precios*, porque estos eran un mecanismo de intercambio, pero no un depósito de valor. Los precios de los bienes y servicios bajaban y subían - y bajan y suben - por efecto de las leyes de la oferta y la demanda ante *las mismas cantidades* de aquellos. Con ello, el aparente valor de las cosas podían subir o bajar ante variaciones de los precios. En lenguaje moderno diríamos que el *PIB* de un país puede aumentar porque aumenten los precios de los bienes y servicios que entran en esa macromagnitud y no porque haya aumentado la cantidad de esos bienes. Marx solucionó ese problema dándole un valor a lo que se produce en términos de trabajo socialmente necesario que era, por definición, independiente de los precios. Un bien o servicio producido vale según Marx por *la contabilización* de las horas de trabajo que por término medio se incorpora a ese bien en el conjunto de la sociedad. El éxito por este lado está conseguido: Marx puede decir lo que vale una cosa sin necesidad de saber su precio. Hasta ahí correcto. El problema viene porque esta teoría así considerada no sólo es independiente de los precios, sino que también lo es de la cantidad producida. Da igual que 100.000 horas de trabajo al año sean necesarias para producir 50.000 litros de leche que las mismas hora de trabajo produciendo 150.000 litros. El valor total es el mismo. Cambia, eso sí, su valor unitario. Ello permite la transformación de valores (unitarios) a precios. De paso hay que considerar que la teoría *contable* de Marx del valor -trabajo, con los ejemplos en la mano, en realidad transforma valores en términos de horas de trabajo en ingresos. Pero, como hemos visto, eso es

subsancible dividiendo por la cantidad producida, para poder comparar valores-trabajo (unitarios) con precios. En Marx, los bienes y servicios (mercancías) llevan incorporados un valor en horas de trabajo; a su vez, el trabajo le transfiere valor, es decir, lo aumenta; en Sraffa, por ejemplo, los precios son meros mecanismos de intercambio. Este problema de Marx -el de la independencia de los valores-trabajo de las cantidades producidas con esas horas- carece de solución. Con la teoría del *valor-contable* del trabajo no se puede revalorizar en sentido literal el trabajo por la mera incorporación de la tecnología y la productividad que ello conlleva. Las cosas producidas seguirán valiendo lo mismo, porque sólo puede aumentar su valor mediante la prolongación de la jornada de trabajo. Por eso, si alguien consigue demostrar que la teoría de la explotación (plusvalía) no es una definición, sino una ley, tenemos una brillante teoría económica. Pero no hay que olvidar para ello que hay que demostrar tres cosas: 1) que pueda ser falsa y no que sea cierta por definición de tasa de plusvalía; 2) que deba depender de los salarios, aunque sea en términos absolutos, porque de lo contrario, si los salarios aumentaran hasta acaparar todo el excedente, dejaría de haber explotación y apropiación -sea cual sea la jornada de trabajo- se ponga Marx como se ponga, porque con todo el excedente incorporado a la masa de salarios no existe plusvalía absoluta; 3) debe demostrarse que esta teoría de la explotación es sólo y propia del sistema capitalista (o del modo de producción capitalista) y no lo es de otros sistemas o modos de producción habidos y por haber.

Si se quiere integrar a Marx en el mundo del conocimiento, en el universitario, en pie de igualdad con otros grandes economistas¹⁴, se ha de actualizar a Marx o abandonarlo, al menos como economista. También, en mi opinión, se debe abandonar la teoría del valor-trabajo según para qué fines. En realidad, a mí siempre me ha parecido una *teoría contable* de los costos, buscando la independencia de los precios para evitar la volatilidad de aquellos (costos) en función de la variabilidad de los últimos (precios)¹⁵. Como teoría contable no me parece aceptable porque tiene defectos de coherencia interna, como se ha señalado repetidamente: ejemplos de eso son la imposibilidad de tener tres leyes (las mencionadas sobre las tasas de ganancia, plusvalía

¹⁴ No entro en el resto de los campos del conocimiento en los que entró Marx porque mi conocimiento de ese *resto* no es lo suficiente para juzgarlo. En esto sigo a Wittgenstein.

¹⁵ Similar a la búsqueda de Ricardo de una distribución independiente de los precios.

y la composición orgánica) *diferentes*; la posibilidad de tasas de ganancia positivas con tasas de explotación negativas¹⁶; la incorrecta transformación marxiana de valores a precios, etc. Puede ser mantenida la teoría de la explotación en el mundo de los valores-trabajo porque eso no depende sólo del nivel cuantitativo, sino del cualitativo, de las relaciones sociales de producción que se producen en el mundo del trabajo asalariado, con distinción entre *valor del trabajo* y *valor de la fuerza de trabajo*. Ello puede mantenerse de alguna manera porque vemos que *la población activa* es siempre menor que la población en general, y menor la activa aún que *la ocupada* merced al paro indeseado (incluso aunque no sea tal). En el pasado, en el estudio de la Historia o en la evolución de las relaciones de producción (primitiva, esclavista, feudal, asiática) ha ocurrido siempre que la población *ocupada* es menor que la población *alimentada*. De todas las maneras y aun cuando desecharíamos la teoría del valor-trabajo como simple método contable y pasáramos a Marx por el tamiz, por ejemplo, del modelo *esrafiano* (el de la mercancía-patrón, de la razón-patrón, de la producción simple y conjunta, de la distinción entre productos básicos, y no básicos), aún tenemos mucho Marx. Tenemos el Marx de la caída (o no) de la tasa de ganancia, el del las esferas de circulación de mercancías y capitales, el del trabajo abstracto y concreto, el del fetichismo de la mercancía (sociología), el de la rotación de los capitales, el de la acumulación primitiva, el de las rentas diferenciales, el de las teorías del subconsumo y sobreproducción, el de los ciclos, el de la reproducción simple y ampliada, etc. Y esto sólo lo que respecta a la economía. Se ha de emplear el rigor para buscar la verdad, porque ésta es a veces más revolucionaria que cien *bastillas* asaltadas.

¹⁶ *Marx after Sraffa*, Steedman, 1977

II - MORISHIMA Y EL TEOREMA FUNDAMENTAL MARXIANO (TEORÍA DE LA EXPLOTACIÓN)

Este trabajo tiene la pretensión de ser una crítica al teorema formulado por Okishio y recogido por el gran economista marxista Michio Morishima. El resultado, como se verá, resulta sorprendente. Pero una advertencia: nada más lejos de mi intención hacer siquiera un análisis histórico de ambos problemas. Sí quiero ser novedoso, creativo en el tratamiento. Yendo directamente al grano del tema que define el título, en 1963 N. Okishio¹⁷ demostraba que: “*Para que exista un conjunto de precios positivos es necesario y suficiente que se de un tipo de salarios reales tal que el grado de explotación sea positivo*”¹⁸. Morishima toma el teorema de Okishio y lo reformula bajo dos aspectos o condiciones: 1) La explotación o, dicho en términos más técnicos, la tasa de plusvalía, la arranca el propietario de los medios de producción por el *alargamiento* (sólo) de la jornada de trabajo más allá de la necesario para que el asalariado pueda vivir él y su familia en condiciones históricas dadas. No se entra aquí en temas de alienación, del fetichismo de la mercancía, del trabajo abstracto y concreto, de los procesos de circulación del dinero, mercancías y capitales, etc., que pertenecen a otras esferas de conocimiento, aunque dentro del *corpus* marxista: 2) El nexo de unión entre valores y precios lo establece Morishima como hipótesis directamente mediante unos “*números positivos*” (coeficientes) de los que no sabemos cómo se obtienen, pero que Morishima los justifica al suponer que todas las industrias tienen la misma composición orgánica de capital. Que sean positivos es porque van a relacionar precios que previamente se han asegurado que lo son porque deben cumplir la ecuación:

$$(1) \quad P > PA + wL$$

donde p es el vector de precios, A la matriz $n \times n$ de requerimientos, w la tasa de salarios y L el vector de inputs de trabajo. Morishima -que lo toma de Okishio- justifica la ecuación (1) porque parte de que A cumple los requisitos del teorema de Perron-Frobenius¹⁹, es decir, A es

¹⁷ *A mathematical Note on Marxian Theorems.*

¹⁸ *Marx's Economics, M. Morishima, 1973 [La teoría económica de Marx, 1977, edit. Tecnos, pág. 66].*

¹⁹ El teorema lo recoge Pasinetti en su conocido libro *Lecciones de teoría de la producción.*

cuadrada, no negativa e indescomponible. Sin embargo y con ser eso perfectamente aceptable, no justifica (1), sino sólo la que sigue:

$$(2) \quad P > PA$$

Luego veremos la importancia de esta diferenciación, porque si el corazón del análisis marxiano se basa en la producción de la plusvalía y su obtención de la misma por parte de la clase de los propietarios por esta condición y si todo al final depende *sólo* del tiempo de trabajo (su alargamiento) ocurren tres cosas: 1) la explotación es inevitable, porque siempre es mayor la población general que la población ocupada, y más aún ésta que la asalariada; 2) esta explotación, según la demostración de Morishima, existe, *sea cual sea la tasa de salarios*, puesto que esta no se hace explícita en el modelo; 3) el alargamiento de la jornada no retribuida se producirá no sólo en el sistema capitalista, objeto de análisis de Marx, sino en cualquier sistema alternativo, aunque se erradicaran otros posibles males. Por todo ello, parecería que todo modelo que se derive del teorema fundamental marxiano debe -debiera- tener al salario como variable explícita fundamental. Cuando se opera así se obtiene el teorema fundamental y, a veces, algo más. Morishima da un rodeo mayor y parte de la hipótesis de la productividad de la matriz de requerimientos para poder aplicar el teorema de Perron-Frobenius. A pesar de todo, el planteamiento de Morishima nos lleva a una sorpresa, como veremos. Veamos primero -aunque sea para dar algo de emoción a un tema no exento de dificultades formales- un modelo alternativo al de Okishio y Morishima.

I - Alternativa al teorema fundamental marxiano

El problema que se plantea es cómo relacionar la tasa de ganancia de la ecuación que define el sistema económico según Sraffa con la tasa de explotación que es causa y forma parte del valor de las mercancías según el esquema marxista. Partimos, con Marx, de la ecuación que define el valor de las mercancías en términos de valor-trabajo²⁰:

²⁰ Aunque en este trabajo apenas se discuten conceptos doy aquí la definición de valor-trabajo de Marx: "Lo que determina la magnitud de valor de un objeto no es más que la cantidad de trabajo socialmente necesario, o sea, el tiempo de trabajo socialmente necesario para su producción". Más adelante explica lo de *socialmente*

$$(3) \quad K_i + V_i + S_i = V_{f_i} Y_i \quad \text{para } i=1 \text{ a } n$$

siendo K_i el capital constante²¹, V_i el capital variable y S_i la plusvalía de la mercancía i o producida en el sector i en términos de valor-trabajo, V_f el valor-trabajo (unitario) de la mercancía i e Y_i la cantidad producida de la mercancía en términos físicos. Este valor (3) ha de transformarse en unidades monetarias mediante unos coeficientes a_i , b_i , c_i , μ_i con las ecuaciones de transformación que hay en (4):

$$(4) \quad a_i K_i + b_i V_i + c_i S_i = \mu_i V_{f_i} Y_i = p_i Y_i \quad \text{para } i=1 \text{ a } n$$

En términos matriciales la ecuación (4) quedaría:

$$(5) \quad \begin{matrix} A & K & + & B & V & + & C & S & = & \mu & V_f & Y & = & p & Y \\ 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n \end{matrix}$$

$$(5\text{bis}) \quad [a_1 \dots a_n] \times \begin{bmatrix} K_1 & & \\ & \ddots & \\ & & K_n \end{bmatrix} + [b_1 \dots b_n] \times \begin{bmatrix} V_1 & & \\ & \ddots & \\ & & V_n \end{bmatrix} + [c_1 \dots c_n] \times \begin{bmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_n \end{bmatrix} =$$

$$= [\mu_1 \dots \mu_n] \times \begin{bmatrix} \Delta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \Delta_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix} = [p_1 \dots p_n] \times \begin{bmatrix} y_1 & & \\ & \ddots & \\ & & y_n \end{bmatrix}$$

donde A , B , C son vectores fila $1 \times n$ de los coeficientes y K , V , S son matrices diagonales de los capitales constante, variable y de la plusvalía, respectivamente, con valores nulos para i distinto de j .

Para esta transformación, Marx explicitó dos condiciones, aunque a veces habla de una tercera. Estas dos condiciones son: 1) que la plusvalía total de todos los sectores fuera igual a las ganancias totales; 2) que las tasas de plusvalía de todos los sectores (o mercancías) fueran iguales. En otras ocasiones habla de que el valor total de la producción

necesario. El Capital, FCE, I tomo, pág. 7. En el tomo III, pág. 100 lo matiza de nuevo Marx diciendo: "El valor de la mercancía se determina por el tiempo de trabajo necesario contenido en ellas y no por el tiempo de trabajo que en ellas se encierra".

²¹ Aunque utilizo la K para no confundir con el coeficiente c que utilizo para la plusvalía, aquélla no representa al capital neoclásico sino al capital constante marxiano.

de todos los sectores fuera igual en términos de valor-trabajo (unitario) y en términos de precio²². Estas son las dos ecuaciones que definen las condiciones primeras de Marx a la luz del modelo de Sraffa:

$$(6) \quad \begin{matrix} C & S & I \\ 1 \times n & n \times n & n \times 1 \end{matrix} = g \left[\begin{matrix} w & L & + & p & X \\ 1 \times n & & & 1 \times n & n \times n \end{matrix} \right] \begin{matrix} I \\ n \times 1 \end{matrix}$$

siendo \mathbf{I} el vector de unos $n \times 1$.

$$(7) \quad e = \frac{S_i}{V_i} \Rightarrow S = eV \quad \text{para todo } i = 1 \text{ a } n$$

Sin embargo, la ecuación (6) no será necesaria (ni conveniente) para lo que viene. Traemos ahora a colación la ecuación que define el sistema económico con salarios *pre-factum*, es decir, con la tasa de ganancia incluyendo todos los costes. Esta ecuación define el sistema *esrafiano* y vamos a apoyarnos en ella y en la *razón-patrón* de Sraffa \mathbf{R} . La ecuación es:

$$(8) \quad \begin{matrix} P & Y \\ 1 \times n & n \times n \end{matrix} = (1 + r) \left[\begin{matrix} w & L & + & P & X \\ 1 \times 1 & 1 \times n & & 1 \times n & n \times n \end{matrix} \right]$$

De (8) se obtiene la ecuación marcada por la *razón-patrón* \mathbf{R} haciendo la tasa de salarios w igual a cero:

$$(9) \quad PY = (1 + R)PX$$

De las ecuaciones (8) y (9) sale que:

$$(10) \quad P = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}$$

²² Hemos heredado una confusión que viene más del idioma que de los conceptos. Cuando se habla de valor de una mercancía estamos hablando de valor unitario, equivalente al precio en términos monetarios. Sin embargo, en los ejemplos de Marx habla del valor de la producción, que sería equivalente a los ingresos, porque sería precio por la cantidad. Por eso la expresión transformación de valores a precios es confusa. Aquí entendemos los valores \mathbf{K} , \mathbf{V} , \mathbf{S} como el valor de la producción de un tipo de mercancía equivalente en términos de precios a \mathbf{PY} (ingresos), cosa que se desprende implícitamente de las ecuaciones de Morishima.

De las ecuaciones (5), (7) y (10) se da el paso trascendente de eliminar los precios y se obtiene a su vez:

$$(11) \quad [AK + BV + eCV] = \frac{w(1+r)}{R-r} \times LX^{-1}Y$$

Vamos ahora a pos-multiplicar (11) por el vector de unos \mathbf{I} de dimensión $n \times 1$ para convertir los dos lados de la ecuación en sendos escalares; llamaremos f a $LX^{-1}Y\mathbf{I}$ por cuestiones de comodidad y tendremos:

$$(12) \quad [AK + BV + eCV]_{n \times 1} \mathbf{I} = \frac{w(1+r)}{R-r} \times f_{1 \times n}$$

Y de (12) se obtiene la tasa de ganancia r :

$$(13) \quad r = \frac{R \times [AK + BV + eCV] \mathbf{I} - wf}{[AK + BV + eCV] \mathbf{I} + wf}$$

¡Y la sorpresa es mayúscula porque en (13), aun cuando la tasa de explotación (de plusvalía) e sea cero, la tasa de ganancia r es (o puede ser) positiva! Y esto se ha conseguido sólo con el supuesto primero de Marx²³. También ocurre en (13) –aunque esto no es una sorpresa– que si la tasa de salario w es cero, la tasa de ganancia r es igual a R , es decir, la tasa de ganancia marxiana alcanza la razón-patrón de Sraffa ($r=R$). Más aún, para que la tasa de ganancia r sea mayor que cero ha de ocurrir que los salarios w queden por debajo de:

$$(14) \quad w < \frac{R[AK + BV + eCV] \mathbf{I}}{f}$$

Y si la tasa de explotación e es cero, aún es positiva la tasa de ganancia r con tal de que los salarios queden por debajo de:

$$(15) \quad w < \frac{R[AK + BV] \mathbf{I}}{f}$$

²³ Que ni siquiera sería necesario una sola tasa de explotación, sino n tasas de explotación *distintas* (de plusvalía) porque e podría ser una matriz diagonal en lugar de un escalar.

Vemos así que los salarios (la tasa de salarios w en el modelo) juegan un papel decisivo porque, *para niveles bajos de salarios, las ganancias pueden ser positivas aun cuando la tasa de explotación marxiana sea cero*. A partir de un cierto nivel de salarios (marcado por (15)), para que las ganancias sean positivas debe haber explotación ($e > 0$), cosa que no recoge el teorema de Okishio-Morishima. Volviendo a (14) y (15), todo esto se puede resumir en:

$$(16) \quad 0 < w < \frac{R[AK + BV]I}{f} < \frac{R[AK + BV + eCV]I}{f}$$

La (16) cumple las fases que recorre la tasa de salarios w para que la tasa de ganancia r sea positiva. La ecuación (13) nos dice *que la condición suficiente para que exista una tasa de ganancia positiva es que la tasa de explotación sea positiva*, pero nada dice de la condición necesaria. Esta aparecerá siempre que se igualen directamente *las tasas de plusvalía* (en términos de valor) con *las tasas de ganancia* (en términos monetarios) sin pasar por *las horcas caudinas* de los coeficientes de transformación. Y, por cierto, sin Sraffa no habríamos llegado a esto porque no habríamos podido eliminar los precios.

Otra sorpresa, aunque no tanta, es la de la posibilidad de tasas de plusvalía negativa y, sin embargo, compatible con una tasa de ganancia positiva en (13). Ya lo contempla Steedman²⁴, pero lo achaca a la definición de valor de Marx. Señala además que puede darse este fenómeno cuando haya producción conjunta, pero no es necesario²⁵. En (13) se ve que puede darse con producción conjunta y simple. Sin embargo, que se de la posibilidad matemática no significa que tenga sentido económico una plusvalía negativa. La plusvalía, según Marx, es el valor del trabajo que realiza el asalariado más allá de lo que necesita para vivir él y su familia en condiciones históricas dadas.

II - Demostración del teorema a partir de un modelo *esrafiano*

Se trae aquí las ecuaciones del modelo *esrafiano* complementado con la de la tasa de plusvalía marxiana. Estas son las ecuaciones:

²⁴ *La teoría económica de Marx*, M. Morishima, pág. 154 (*Marx after Sraffa*, 1977). Aquí se ha seguido un camino formalmente diferente.

²⁵ *La teoría económica de Marx*, M. Morishima, pág. 159.

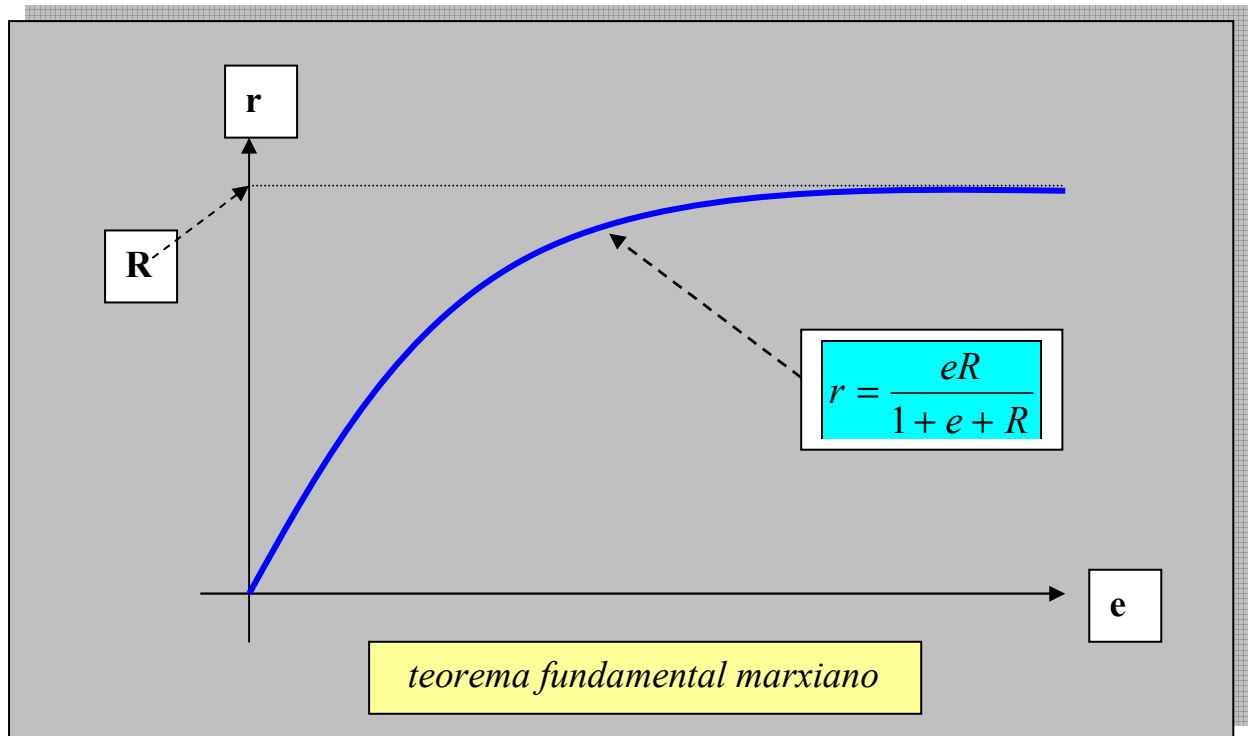
$$(17) \quad ewL = r[wL + PX]$$

$$(18) \quad PY = (1 + r)[wL + PX]$$

$$(19) \quad PY = (1 + R)PX$$

$$(20) \quad LI = 1$$

$$(21) \quad PYI - PXI = 1$$



La primera de estas cinco (17) resulta de igualar la plusvalía de *cada sector* a las ganancias directamente; también de cada sector, pero sin coeficientes de transformación; la segunda define el sistema; la tercera es, como siempre, la resultante de igualar a cero la tasa de salario w y obtener así la razón-patrón de Sraffa R ; la cuarta y la quinta son fruto de las normalizaciones que introduce Sraffa en sus modelos. De estas 5 ecuaciones sale que:

$$(22) \quad r = \frac{eR}{1 + e + R}$$

donde *para que exista una tasa de ganancia r positiva debe ser positiva la tasa de explotación e !* Con ello se cumple la condición

necesaria del teorema fundamental marxiano. Y a este resultado hemos llegado a partir de la razón-patrón de Sraffa con un sistema económico de producción simple *esrafiano*. Al mismo resultado llega Steedman²⁶, llamando a R “tasa de ganancia máxima posible en el sistema”. Es decir, no emplea a Sraffa, aunque los supuestos que hace y el instrumental que emplea (recurre al teorema Perron-Frobenius) lleva implícitamente al italiano.

III - Discusión de la demostración de Morishima

Veamos ahora con detenimiento el teorema fundamental, versión Morishima²⁷, que es la versión estándar del teorema. Parte de dos supuestos o hipótesis: 1) que estamos ante un sistema productivo, al menos en el sector de medios de producción. No obstante, y por mi parte, partiré de la economía como un todo porque eso no afecta al teorema; 2) supone que todas las industrias (sectores) obtienen beneficios. En el curso de la demostración no es necesario que haya una única tasa de ganancia²⁸, sino que puede haber tantas como sectores. De la primera condición nos da que:

$$(26) \quad \underset{nxn}{Y} > \underset{nxn}{X}$$

donde Y es la matriz de productos finales y X la de medios de producción. La (26) nos dice que, en todos los sectores, el producto neto ($YI-XI$) es mayor que cero, es decir, que siempre la economía produce más de lo que consume sea cual sea el sector. Si llamamos A a la matriz de requerimientos que surge de hacer $X=AY$, es decir, con $A=XY^{-1}$, tenemos la ecuación (27):

$$(27) \quad Y > AY$$

que en términos de valor-trabajo (unitario) se convierte en:

$$(28) \quad \underset{1xn}{V_f} \underset{nxn}{Y} > \underset{1xn}{V_f} \underset{nxn}{A} \underset{nxn}{Y}$$

²⁶ *Marx after Sraffa*, 1977 (*Marx, Sraffa y el problema de la transformación*, I. Steedman, pág. 122, edit. FCE).

²⁷ Ver *La teoría económica de Marx*, cap. 5.

²⁸ Más adelante se dedica un epígrafe a ver esto.

donde ya no tenemos n bienes producidos en n sectores, sino n valores-trabajo de n bienes. Ahora Morishima, tras muchos pasos intermedios y muchas consideraciones previas sobre el alargamiento de la jornada de trabajo, llega a una ecuación análoga²⁹ a la (29):

$$(29) \quad \begin{matrix} V_f & Y & - & V_f & A & Y & - & V_f & B & L & > & e & V_f & B & L \\ 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & n \times n & & 1 \times 1 & 1 \times n & n \times n & n \times n \end{matrix}$$

siendo V_f la matriz final de valores-trabajo, A la matriz de requerimientos, B la matriz de bienes y servicios o bienes-salario -que diríamos hoy- que consumen los trabajadores, L los inputs de trabajo directo por bien o servicio, y, por último, e la tasa de explotación (de plusvalía) que surge de la ecuación $S = eV_fBL$, donde S es la plusvalía; de forma análoga, V_fBL sería el capital variable y V_fAY el capital constante, todos ellos, claro está, en unidades de valor-trabajo. El punto crucial de la versión Morishima del teorema fundamental es la del signo *mayor que* de (29). Viene, por supuesto, de la condición primera de la productividad que asegura un vector de positivo de productos netos ($Y - AY$) al aplicar Perron-Frobenius a $Y > AY$. La pregunta es: ¿da para tanto como para suponer -como hace Morishima- que se cumpla (30)?:

$$\begin{matrix} V_f & Y & - & V_f & A & Y & - & V_f & B & L & > & 0 \\ 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & n \times n & & 1 \times n \end{matrix}$$

Está claro que si se cumple (30), entonces eV_fBL ha de ser mayor que cero, por lo que e ha de serlo también porque se supone que B -la matriz de consumo de los bienes-salario- ha de ser positiva. Sin embargo, con A productiva puede cumplirse (28) y no necesariamente (30). Pero, incluso en este caso, Morishima obtendría sólo la condición suficiente, pero no la necesaria. Incluso A puede ser productiva y cumplirse (30), pero con el signo de igualdad, de lo que se deduce que la primera de las condiciones del japonés tampoco es una condición suficiente. En definitiva, *la versión del teorema fundamental marxiano en versión Morishima no nos da ni la condición necesaria ni la suficiente*. No tenemos teorema. Ya hemos visto anteriormente, no obstante, que con supuestos menos restrictivos, es decir, sin tener siquiera una matriz A productiva³⁰, se puede demostrar la condición de

²⁹ *La teoría económica de Marx*, pág. 66.

³⁰ Como es el caso de la producción conjunta del que partimos en nuestra demostración.

necesaria del teorema; tampoco es necesario en este caso que todas las tasas de explotación sean iguales. Lo único que se hizo fue igualar los valores-trabajo -premultiplicados previamente por unos coeficientes de transformación- e igualar para cada bien o servicio producido a los precios de producción (multiplicados por las cantidades). Y, al igual que la razón-patrón de Sraffa, tampoco ha sido necesario calcular previamente los coeficientes de transformación. En definitiva, tenemos la ecuación (5).

IV - Generalización del teorema fundamental marxiano

El teorema fundamental que acabamos de ver en (13) en versión rebajada lo podemos generalizar para n tasas de ganancia g , n tasas de ganancia máxima G , n tasas de salario w y n tasas de explotación e . Veamos como. Partimos de la misma ecuación (5) que define el sistema en términos de valor, pero cambiamos la ecuación (8) que define a su vez el sistema en términos de precios por (31). Esta será una ecuación matricial como sigue:

$$(31) \quad P Y = \begin{bmatrix} L W + P X \\ \text{1xn nxn} \quad \text{1xn nxn} \quad \text{1xn nxn} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} I + G \\ \text{nxn} \quad \text{nxn} \end{pmatrix}$$

con las novedades de que W es ahora una matriz $n \times n$ de salarios (diagonal o no, es decir, con n términos o con $n \times n$); G la matriz de tasas de ganancia (también con n términos o $n \times n$). También buscamos la ecuación que surge de hacer cero todas las tasas de salario W y sale:

$$(32) \quad P Y = P X \begin{pmatrix} I + G_m \\ \text{1xn nxn} \quad \text{1xn nxn} \quad \text{nxn} \quad \text{nxn} \end{pmatrix}$$

con G_m como matriz de tasas máximas de ganancia. De (31) y (32) obtenemos (33) de forma análoga a (9)

$$(33) \quad P = L W (1 + G) (G_m - G)^{-1} X^{-1}$$

que combinada con (5) y con (7) y pos-multiplicando el resultado por el vector I de unos $n \times 1$ sale:

$$(34) \quad [AK + BV + CVE]I = L W (1 + G) (G_m - G)^{-1} X^{-1} Y I$$

donde, al igual que antes para el caso de la producción simple, se cumple la condición suficiente del teorema: *basta que las tasas de explotación sean positivas para que las tasas de ganancia lo sean también, aunque también son posibles tasas de ganancia positivas sin tasas de explotación positivas.*

Resumiendo del teorema fundamental marxiano, versión Morishima, se puede decir lo siguiente: el gran economista japonés - que lo es a pesar de lo criticado- aborda el teorema fundamental a partir de Okishio bajo aspectos muy restrictivos y además comete un error. Por lo primero, aborda el teorema fundamental bajo el supuesto de que toda la teoría de la explotación se basa *sólo* en el alargamiento de la jornada; segundo, no hace explícitos los salarios, con lo que, sea cual sea el nivel de estos, siempre existe explotación; tercero, parte de que la matriz A de requerimientos sea cuadrada, no negativa, indescomponible para poder aplicar Perron-Frobenius y asegurarse con ello un vector de precios de productos finales positivos P y un vector final de productos *netos* finales $(Y-X)I$ positivos. Con lo cual, sólo puede operar bajo la producción simple y pasar de valores a precios sin coeficientes de transformación. Al final se le escapa a Morishima las condiciones necesarias y suficientes del teorema fundamental. Pero, como hemos visto, casi todo tiene arreglo. Por nuestra parte, hemos generalizado la condición suficiente del teorema fundamental a n tasas de salario, a n tasas de ganancia g y a n tasas *esraffianas* de ganancia máxima³¹, aunque no hayamos podido obtener, bajo nuestras hipótesis en este trabajo, la condición necesaria.

V – Nueva aproximación al teorema fundamental marxiano

En los epígrafes anteriores nos hemos aproximado al teorema fundamental marxiano en un camino paralelo al de Steedman y hemos llegado a las mismas conclusiones, pero sin aceptar nunca que exista una tasa de explotación negativa porque eso carece de sentido. Hemos demostrado que la demostración de Okishio-Morhisima no es satisfactoria. La razón de ello es que el economista japonés hace depender la teoría de explotación de Marx exclusivamente de la posibilidad de la prolongación de la jornada de trabajo y del nivel de los salarios. Es una versión de la teoría de la explotación de Marx, pero

³¹ Al no estar ahora en producción simple no tenemos la razón-patrón sraffiana R , pero sí tasas de ganancias máximas.

no es la única. El problema de entender así la teoría de Marx es que, como Steedman ha demostrado por un camino -y aquí por otro-, es que se deriva una conclusión terrorífica para la teoría de Marx: que puede darse una tasa de ganancia positiva incluso con ¡tasa de explotación negativa! La razón de ello es fácil de entender. Si en el proceso de reproducción del sistema económico, el valor total de los bienes-salario de los trabajadores (asalariados) más el valor total de los medios de producción es *mayor* que el valor total de lo producido, la diferencia entre este último valor y la suma de los dos anteriores es negativo, por lo que la tasa de explotación es a su vez negativa. El que pueda ocurrir este hecho va a depender que el valor total de medios de producción de un período sea inferior al del anterior. Para evitar este hecho desagradable que supone la destrucción de la teoría de la explotación, vamos a suponer que aceptamos la segunda versión de Marx de la teoría de la explotación. Según ésta, en el modo de producción capitalista el valor total de lo que producen los asalariados es mayor que el valor de los bienes y servicios que consumen esos mismos asalariados *independientemente de cual sea la jornada de trabajo*. Quizá no se puede encontrar un texto de Marx tan explícito como el anterior, pero cabe como interpretación en la obra del germano. Según lo anterior, en el mejor (o peor, según se mire) de los casos no habría explotación porque los trabajadores tendrían una jornada de trabajo y/o unos medios y condiciones que producirían sólo los bienes y servicios que ellos mismos consumen. No habría reproducción de los medios de producción y no habría tampoco plusvalía. El sistema sería inviable porque, una vez consumidos los medios de producción existentes al cabo de uno o varios períodos de reproducción del sistema, los trabajadores no tendrían medios con los que trabajar. Habría que considerar que la parte de la población no activa (pensionistas, por ejemplo) no tendrían medios para sobrevivir salvo los familiares de los asalariados que se consideraría que han diferido su salario y transmutado parte del salario que les hubiera correspondido en un fondo para la jubilación (sea público o privado, sea de reparto o de capitalización). Incluso si también los asalariados produjeran hasta también los medios de producción, no habría explotación (sería cero en este caso).

Hechas estas consideraciones vamos a definir un modelo que intenta superar la dificultades anteriores y alguna más. Es decir, un modelo en el que no quepa la crítica de Steedman y sin los defectos de

el de Morhisima que ya hemos visto. Otros defectos o limitaciones que vamos a superar son los siguientes: en el modelo que se avecina se trabajará con producción conjunta y con la consiguiente tasa máxima de ganancia, en lugar de la producción simple y la razón patrón; en el modelo con el que intentamos avanzar vamos a obviar el problema de la transformación de valores a precios de Marx por los defectos de este método de construcción de los precios; por último y como consecuencia de los anterior, vamos a relacionar directamente las categorías de valor de Marx (capitales constante, variable y plusvalía) con las categorías *esrafianas* que llevan a la determinación de los precios (medios de producción, salarios y ganancias como margen sobre los costes) *directamente*. Para un marxista esto puede sonar a prevaricación y anatema de la doctrina marxista, pero ello nos depara más de una sorpresa que de momento no desvelo. Sin más dilación entramos en la formalización del modelo (o sistema) integrado Sraffa-Marx. La primera ecuación es la de definición de un sistema económica esrafiano con un cierto grado de generalización.

$$(46) \quad \underset{1 \times n \quad n \times n}{P} Y = \left[\underset{1 \times n \quad n \times n}{L} \underset{1 \times n \quad n \times n}{W} + \underset{1 \times n \quad n \times n}{P} \underset{n \times n \quad n \times n}{X} \right] (\underset{n \times n}{I} + \underset{n \times n}{G})$$

donde P es el vector de precios, Y la matriz $n \times n$ no diagonal de productos finales, L el vector horizontal de inputs de trabajo, X la matriz también $n \times n$ de medios de producción, W la matriz $n \times n$ (diagonal o no, a gusto del lector) de salarios y G la matriz de tasas de ganancia $n \times n$ (también diagonal o no). La ecuación (46) define un sistema de producción conjunta (Y es no diagonal) con salarios pre-factum (y no post-factum), con posibles $n \times n$ tasa de salario y otras tantas de ganancias. Es pues un sistema esrafiano muy generalizado, aunque faltaría la aportación del capital fijo. La ecuación siguiente vendría dada al hacer cero los salarios.

$$(47) \quad PY = PX(I + G_m)$$

donde G_m sería la matriz $n \times n$ de tasas máximas de ganancia. Estas tasas van a jugar un papel fundamental, que no lo hacen ni en Steedman y menos aún en Morishima. Con ambas ecuaciones de definición del sistema esrafiana ya hemos acabado con la aportación de Sraffa. Ahora viene Marx.

$$(48) \quad S = [LW + PX]GI$$

donde S sería la plusvalía total generado (arrancado por los capitalistas en lenguaje marxiano) por el sistema. Esta visión *generalizada* es menos restrictiva que la de Marx, que exige esa igualdad por empresa. Incluso sería muy restrictiva se la aceptáramos por sector o proceso. I sería el vector vertical de unos que permite obtener el valor total de la plusvalía. La prevaricación de la que hablaba se deriva de que hemos igualado la plusvalía que viene medida según Marx en horas de trabajo (al igual que todas sus magnitudes) con el valor de la plusvalía medida a partir de los precios P . La pregunta es: ¿entonces, según este modelo, si varían los precios P ha de variar la plusvalía? Desde luego ello no debiera ser así porque la plusvalía marxiana (y la consiguiente tasa de explotación) ha de ser independiente de los precios. Sólo se pide un poco de paciencia porque la solución viene en poco tiempo. El capital variable V vendría dado por la masa de salarios.

$$(49) \quad V = LWI$$

Al igual que antes, aparentemente en (49), si varían los salarios y los precios también debería la plusvalía. Ahora definimos *la plusvalía global*³² e como el cociente entre (48) y (4), es decir:

$$(50) \quad eLWI = [LW + PX]GI$$

Ahora, de (46) y (47) obtenemos como es habitual la ecuación de precios.

$$(51) \quad P = LW(1 + G)(G_m - G)^{-1}X^{-1}$$

Pues bien, del conjunto de las ecuaciones (46), (47), (48), (49), (50) y (51), se obtiene la (52).

$$(52) \quad \boxed{LW(1 + G)(G_m - G)^{-1}X^{-1}(Y - X)I = (1 + e)LWI}$$

³² Plusvalía global, es decir, que la explotación se daría en el conjunto del sistema, aunque en (50) también es válida para una explotación marxiana (por mercancía y/o sector si W y G son diagonales).

Y en (52) ¡han desaparecido los precios! y esta ecuación es una función implícita de las ganancias G (si G es sólo diagonal), que dependen de la tasa de explotación e , de los inputs de trabajo L , de los medios de producción X , de los productos finales Y y de las tasas de ganancia máximas G_m , tasas máximas que, a pesar de las apariencias y como luego veremos, dependen sólo de las variables físicas del sistema (de L , X e Y). Aparentemente, también dependería según (52) de las tasas de salario, pero esto es sólo la apariencia (si W es sólo diagonal). Al introducir una relación más entre las mismas variables cual es la tasa de explotación e , el modelo esrafiiano de definición del sistema (ecuaciones (46) y (47)) pierde su grado de libertad entre salarios y ganancias, y por ello la relación entre las variables que representa (52) es invariante respecto a los precios. Para eliminar los salarios en (52) vamos a pasar a tasas unitarias según las ecuaciones siguientes:

$$(53) \quad wLI = LWI$$

$$(54) \quad (1 + g_m)PXI = PX(I + G_m)I$$

$$(55) \quad (1 + g)[wL + PX]I = [LW + PX](I + G)I$$

siendo ahora w , g y g_m las tasas unitarias de salario, ganancia y ganancia máxima obtenidas no arbitrariamente o introduciéndolas como hipótesis, sino a partir de las n (o $n \times n$) tasas de salarios W , ganancias G y ganancias máximas G_m . Del conjunto de ecuaciones anteriores se obtiene:

$$(56) \quad wL(1 + g)(g_m - g)^{-1}X^{-1}(Y - X)I = (1 + e)wLI$$

que despejando la tasa de ganancia g y, eliminado el elemento común la tasa de salarios w , queda:

$$(57) \quad g = \frac{g_m(1 + e)LI - LX^{-1}[Y - X]I}{(1 + e)LI + LX^{-1}[Y - X]I}$$

En (57) parecería que si la tasa de explotación fuera cero ($e=0$) habría una tasa de ganancia g positiva con tal de que el numerador fuera mayor que cero, es decir, con tal de que:

$$(58) \quad g(e=0) > 0 \quad \text{si} \quad g_m > LX^{-1}[Y - X]I$$

y con ello la versión de Steedman sobre la tasa de explotación y la tasa de ganancia se cumpliría, y no lo haría el teorema de Okishio-Morishima. Pero todo depende ahora de la misteriosa tasa de ganancia máxima g_m , que la hemos obtenido a partir de la ecuación de definición del sistema haciendo la tasa de salarios cero. Por ello cabe pensar que la tasa de ganancia máxima g_m es o depende sólo de las variables físicas del sistema (L , X e Y), de las cuales se obtiene el excedente. Pero ello hay que demostrarlo. Si en las ecuaciones de definición del sistema (46) y (47) reemplazamos sus tasas múltiples (matrices) de salarios, ganancias y ganancias máximas por sus tasas unitarias queda:

$$(59) \quad PY = (1 + g)[wL + PX]$$

Y si en (59) despejamos los precios y hacemos cero la tasa de ganancia, el resultado es:

$$(60) \quad P = wL[Y - X]^{-1}$$

Y de forma análoga, si en (51) reemplazamos sus valores matriciales de estas variables monetarias por su valores unitarios y con la tasa de ganancia también en cero, se obtiene:

$$(61) \quad P = \frac{w}{g_m} \times LX^{-1}$$

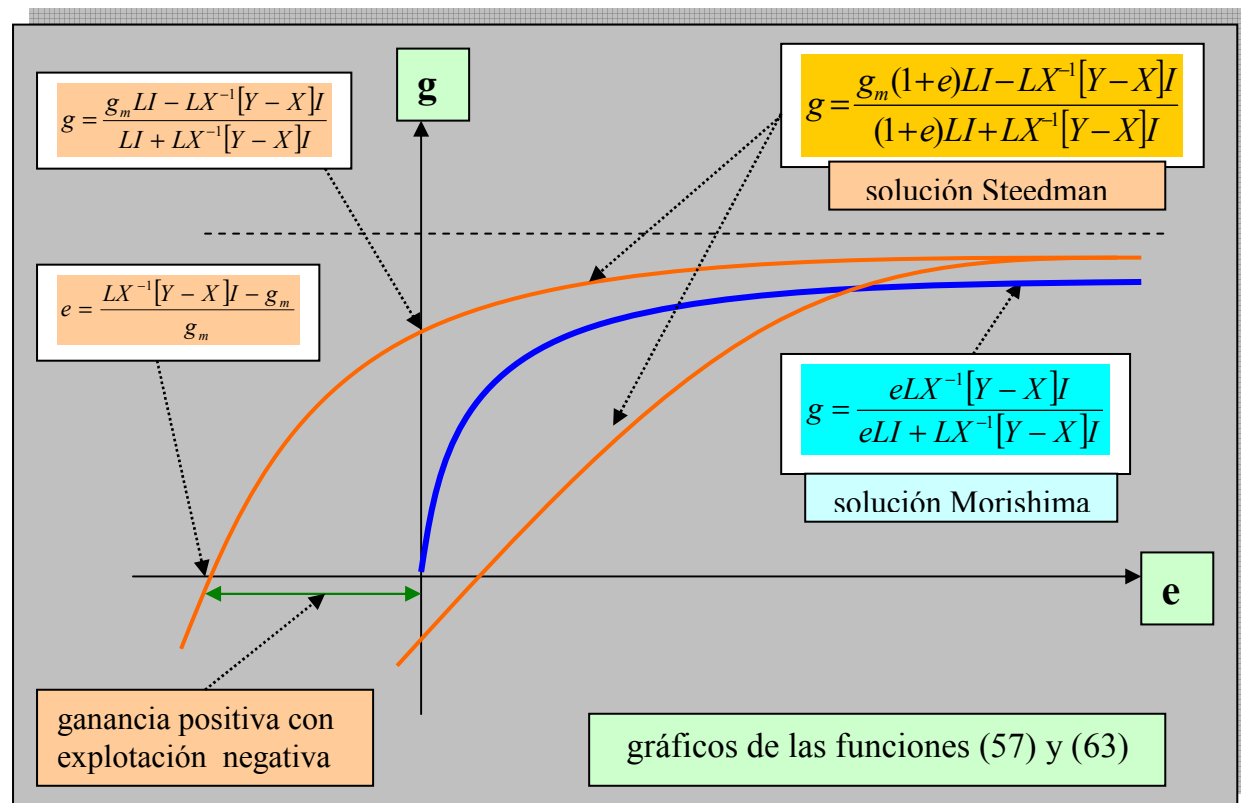
En (60) y (61) tenemos dos formalizaciones del vector de precios, que igualándolas e eliminando la variable común tasa de salarios y multiplicando los dos lados de la igualdad resultante por el vector vertical de unos \mathbf{I} :

$$(62) \quad g_m = \frac{LX^{-1}[Y - X]I}{LI}$$

La relación (62) es muy importante, porque hace depender –como ya habíamos sospechado– la tasa de ganancia máxima g_m sólo de las variables físicas del sistema (inputs de trabajo L , medios de producción

X y productos finales Y). Pero lo importante viene ahora, porque si reemplazamos esta tasa de ganancia máxima obtenida en (62) en la ecuación (57) queda:

$$(63) \quad g = \frac{eLX^{-1}[Y - X]I}{eLI + LX^{-1}[Y - X]I}$$



Esta ecuación es conceptualmente análoga a la obtenida por Steedman³³ y donde sí es verdad que se cumple una versión del teorema de Okishio-Morishima: que *para que exista una tasa de ganancia positiva ha de haber una tasa de explotación positiva*. Pero la gran ventaja de este final respecto a Morishima y al propio Steedman es que: a) hemos soslayado los precios; b) no hay transformación de valores a precios; c) no es necesario hacer ningún supuesto de proporcionalidad o no entre valores-trabajo de Marx y precios; d) la relación se cumple siempre independientemente de cualquier vector de precios, de cualquier tasa de ganancia máxima; e) hemos soslayado los capitales constante y variable en términos marxianos que utiliza Steedman; f) se cumple al menos la condición necesaria (cosa que no

³³ Marx, Sraffa y el problema de la transformación, pág. 130, FCE, 1985 (Marx after Sraffa, 1977).

ocurre en Morishima, tal y como hemos demostrado en epígrafes anteriores) del teorema fundamental marxiano; g) el excedente está definido en términos físicos y no en términos de valor, por lo que este excedente no va a depender de los valores-trabajo (cosa que ocurre en Marx); i) la tasa de ganancia no depende de la tasa de salarios; j) la relación (63) es cierta no sólo para la producción simple (Steedman) sino también para la producción conjunta.

En este epígrafe se ha podido demostrar la condición necesaria y suficiente para que exista una tasa de ganancia positiva es que exista una tasa de explotación marxiana positiva. Hemos visto que la demostración de Morishima es errónea porque si la teoría marxista de la explotación dependiera sólo de la prolongación de la jornada de trabajo existe una jornada de trabajo que no puede dar lugar a plusvalía alguna. Lo mismo ocurre con la tasa de salarios, es decir, a partir de un cierto nivel de salarios no es posible la explotación. Sólo cuando la tasa de explotación se entiende como una relación por cociente entre el trabajo aportado y el necesario para reproducir y retribuir a los asalariados y sus familias se cumple el teorema fundamental marxiano. Steedman subsana algunas de las deficiencias que tiene el modelo de Morishima, pero no todas. En este epígrafe: a) se ha generalizado la demostración de Steedman a partir de la producción simple de Sraffa (razón-patrón) a un modelo de producción conjunta; b) con lo anterior, se ha partido de la producción conjunta, lo que ha permitido pasar de las limitaciones del uso de la razón patrón (producción simple) a un modelo con n (o $n \times n$, a elegir) tasas máximas de ganancia; c) se ha generalizado el teorema para $n \times n$ tasas de salarios y $n \times n$ tasas de ganancia; d) la tasa de ganancia máxima *esraffiana* ha jugado un papel fundamental en la demostración del teorema, aunque luego ha desaparecido³⁴, y ello ha permitido visualizar el defecto de la refutación de Steedman del teorema fundamental; e) se ha relajado el estricto supuesto de una misma tasa de explotación por sectores (marxiano), empresas, procesos o mercancías, por el de una *tasa de explotación global* –aunque compatible también con tasas distintas– entre los capitalistas como clase y los asalariados como clase, aunque ello abra el interrogante de si la explotación en el nivel agregado no es

³⁴ Una analogía de lo anterior sería el uso de los números imaginarios (el uso de la raíz cuadrada de menos uno) en el planteamiento de problemas cuya solución exigen la utilización de estos números, que luego no aparecen en esa solución.

sólo propia del sistema capitalista, sino de cualquier otro sistema histórico o hipotético no capitalista.

El núcleo duro de la economía marxista es la teoría de la explotación, pero el supuesto de la constancia de la tasa de explotación por sector (o empresa o proceso) es insostenible. Más aún es insostenible la constancia de la composición orgánica de capital por mercancía, empresa o sector. Es admisible una teoría de la explotación global porque la población ocupada –aunque sólo sea la asalariada– es menor que la población que vive de ella. Por otro lado, la teoría *contable* del valor-trabajo o es un rodeo innecesario (Samuelson) o es trivial o es inoperante para llegar a unos precios significativos. Por todo ello, la posibilidad de integrar a Marx en el corpus de conocimiento de los economistas y aprovechar sus teoría de la reproducción y acumulación, su teoría de la sobreproducción y subconsumo, sus teorías de las crisis, su teoría de la caída de la tasa de ganancia a lo largo de la historia del modo de producción capitalista, etc., es que pueda ser integrada su teoría de la explotación en unos fundamentos (nuevos) económicos. La integración de esta teoría de la explotación con la teoría del excedente es una posibilidad. En este artículo se ha intentado esta integración, acotando y subsanando los defectos y limitaciones dejados por Okishio, Morishima y Steedman.

1 - Transformación de valores a precios

cuadro 1

Valores: entrada de datos

	K	V	S	valor total	cantidades	t. gan.	t. explot.	C/V
1	225	90	60	375,0	355	0,19	0,67	2,50
2	100	120	80	300,0	340	0,36	0,67	0,83
3	50	90	60	200,0	180	0,43	0,67	0,56
	375	300	200	875,0		0,30	0,67	1,25

cuadro 2

Solución histórica de Marx

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	225,0	90,0	93,3	408,3	1,150	0,30	1,04	2,50
2	100,0	120,0	65,2	285,2	0,839	0,30	0,54	0,83
3	50,0	90,0	41,5	181,5	1,008	0,30	0,46	0,56
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	0,67	1,25

cuadro 3

Solución correcta según Marx

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	112,5	90,0	93,3	295,8	0,833	0,46	1,04	1,25
2	150,0	120,0	65,2	335,2	0,986	0,24	0,54	1,25
3	112,5	90,0	41,5	244,0	1,355	0,20	0,46	1,25
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	0,67	1,25

cuadro 4

Solución histórica de Bortkiewicz

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	288	96	96	480,0	1,352	0,25	2,50	3,00
2	128	128	64	320,0	0,941	0,25	1,67	1,00
3	64	96	40	200,0	1,111	0,25	1,47	0,67
	480	320	200	1.000,0		0,25	1,92	1,50

cuadro 5

Solución normalizada de Bortkiewicz

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	225,0	90,0	96,0	411,0	1,158	0,30	2,21	2,50
2	100,0	120,0	64,0	284,0	0,835	0,29	1,54	0,83
3	50,0	90,0	40,0	180,0	1,000	0,29	1,38	0,56
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	1,75	1,25

cuadro 6

Solución proporcional a las sumas

	K	V	S	precios x Q	precios	t. gan.	t. explot.	C/V
1	126,8	101,4	67,6	295,8	0,833	0,30	0,67	1,25
2	143,7	114,9	76,6	335,2	0,986	0,30	0,67	1,25
3	104,6	83,7	55,8	244,0	1,355	0,30	0,67	1,25
	375,0	300,0	200,0	875,0		0,30	0,67	1,25

El primer y cuarto cuadros son los datos originales de Marx y Bortkiewicz; el cuadro 2 es la solución de Marx; el cuadro 3 sería la solución correcta si se cumplieran las dos condiciones de Marx; el cuadro 5 es la solución de Bortkiewicz normalizada a las sumas de los capitales constante, variable y plusvalía originales; el cuadro 6 es la solución proporcional a las sumas de la que trata el epígrafe 6 del artículo.

2 -Transformación de valores a precios y coeficientes

cuadro 1 Valores (datos originales)

	K	V	S	valor total	cantidades	t. ganan.	t. explot.	C/V
1	225	90	60	375,0	355	19,0%	0,67	2,50
2	100	120	80	300,0	340	36,4%	0,67	0,83
3	50	90	60	200,0	180	42,9%	0,67	0,56
	375	300	200	875,0		29,6%	0,67	1,25

cuadro 2 Solución histórica de Marx

	K	V	S	precios x Q	precios	Coeficientes de transformación		
	K	V	S			K	V	S
1	225,0	90,0	93,3	408,3	1,150	1,000	1,000	1,556
2	100,0	120,0	65,2	285,2	0,839	1,000	1,000	0,815
3	50,0	90,0	41,5	181,5	1,008	1,000	1,000	0,691
	375,0	300,0	200,0	875,0				

cuadro 3 Solución correcta según Marx

	K	V	S	precios x Q	precios	Coeficientes de transformación		
	K	V	S			K	V	S
1	112,5	90,0	93,3	295,8	0,833	0,500	1,000	1,556
2	150,0	120,0	65,2	335,2	0,986	1,500	1,000	0,815
3	112,5	90,0	41,5	244,0	1,355	2,250	1,000	0,691
	375,0	300,0	200,0	875,0				

cuadro 4 Solución histórica de Bortkiewicz

	K	V	S	precios x Q	precios	Coeficientes de transformación		
	K	V	S			K	V	S
1	288	96	96	480,0	1,352	1,280	1,067	1,029
2	128	128	64	320,0	0,941	1,280	1,067	0,982
3	64	96	40	200,0	1,111	1,280	1,067	0,964
	480	320	200	1.000,0				

cuadro 5 Solución normalizada de Bortkiewicz

	K	V	S	precios x Q	precios	Coeficientes de transformación		
	K	V	S			K	V	S
1	225,0	90,0	96,0	411,0	1,158	1,000	1,000	1,600
2	100,0	120,0	64,0	284,0	0,835	1,000	1,000	0,800
3	50,0	90,0	40,0	180,0	1,000	1,000	1,000	0,667
	375,0	300,0	200,0	875,0				

cuadro 6 Solución proporcional a las sumas

	K	V	S	precios x Q	precios	Coeficientes de transformación		
	K	V	S			K	V	S
1	126,8	101,4	67,6	295,8	0,833	0,563	1,127	1,127
2	143,7	114,9	76,6	335,2	0,986	1,437	0,958	0,958
3	104,6	83,7	55,8	244,0	1,355	2,091	0,929	0,929
	375,0	300,0	200,0	875,0				

Los coeficientes de transformación son los cocientes entre los precios de los cuadros 2 a 6 y el cuadro 1 de valores.

Anexo: Una forma simple del teorema fundamental

Se han dado muchas formas de demostrar el teorema fundamental desde que Okishio dio la demostración³⁵ y que recogió Morishima en *Marx's Economics*. La que doy aquí es la más simple que se me ha ocurrido. Simple doblemente: matemáticamente y en los supuestos, porque sólo hago uno y es el de que *la plusvalía total del sistema de valores de Marx sea igual a las ganancias totales* a partir de un modelo esrafiano de producción simple con salarios *pre-factum*. Es el segundo de los criterios de Marx, aunque no sea conumente aceptado por los marxista. Con ello quiero decir que no se hace el supuesto de que el valor total de las mercancías (primer criterio marxiano) sea igual al valor agregado de la suma de bienes y servicios en términos de precios. Partimos de una ecuación marciana en términos de valor del conjunto de la producción de bienes y servicios tal como:

$$(1) \quad VY = VX + LY$$

donde V es un vector horizontal $1 \times n$ del valor en horas de trabajo por producto de cada una de las mercancías, siendo Y la matriz $n \times n$ de productos finales; X es la matriz de medios de producción también $n \times n$ y L es el vector $1 \times n$ de inputs de trabajo (se supone que previamente homogeneizado). Introducimos una ecuación ahora creo que original o poco habitual en la discusión del teorema:

$$(2) \quad LY = aVY + S$$

Original porque con ello introducimos el equivalente a la demanda en los modelos neoclásicos. En efecto, del total del trabajo necesario para producir Y , es decir, LY , parte lo van a destinar los trabajadores directos a consumir los productos finales (aVY) y parte será la plusvalía (S) arrancada a los trabajadores. Con ello nos adentramos a los criterios marxianos de la explotación, al menos en los aspectos formales, sin entrar en los aspectos conceptuales, de los cuales aceptamos lo escrito por Marx sin crítica ninguna. Esto en realidad es una breve nota también. La teoría de la explotación nos dice que esta es una relación –en su aspecto formal– entre la plusvalía obtenida (S) y el valor de la fuerza de trabajo en términos de horas de trabajo necesarias para producir lo que consumen los trabajadores directos y sus familias

³⁵ A mathematical Note on Marxian Theorem”, 1963.

en un tiempo histórico dado. Este consumo es aVY que ya hemos visto. Y la relación de la explotación viene dada por:

$$(3) \quad S = eT$$

siendo e la tasa de explotación y T el valor de la fuerza de trabajo medido en horas de trabajo de los bienes que consumen los trabajadores directos. Podemos entender que hay una tasa única por proceso, sector o mercancía o también que e no sea un escalar, sino también un vector que diferenciara los diferentes grados de explotación según procesos, sectores o mercancías, pero en este caso nos alejaríamos de los supuestos de Marx. En cualquier caso, ambas hipótesis llevan al mismo resultado final del teorema. Es obvio que T vale:

$$(4) \quad T = aVY$$

Pues bien, del conjunto de las ecuaciones de la (1) a la (4) obtenemos:

$$(5) \quad VY = VX + aVY + eaVY$$

que sumada para el conjunto de los bienes y servicios sale:

$$(6) \quad VYI = VXI + aVYI + eaVYI$$

siendo I el vector vertical de unos $n \times 1$. Comparamos ahora (6) con lo que sería la ecuación de definición esrafiana de su modelo económico:

$$(7) \quad PYI = PXI + wLI + g(wL + PX)I$$

donde P es el vector de precios $1 \times n$, w la tasa de salarios y g la tasa de ganancia, siendo las demás variables las variables (Y, X, L) las definidas anteriormente. Y lo que hacemos es igualar el valor de la plusvalía total generado por el sistema económico ($eaVYI$) con el valor total en términos de precios de las ganancias ($g(wL + PX)I$), es decir:

$$(8) \quad g(wL + PX)I = eaVYI$$

Tomamos ahora PXI como numerario, es decir, hacemos $PXI=1$, despreciamos la tasa de ganancia g y obtenemos:

$$(9) \quad g = \frac{aeVYI}{1+wLI}$$

Y en (9) podemos comprobar varias cosas: a) que se cumple al menos lo fundamental del teorema marxiano y es que *para que exista una tasa de ganancia positiva (g) es condición necesarias y suficiente que exista una tasa de explotación positiva (e)*; b) que la tasa de ganancia es inversamente proporcional a la tasa de salarios, que aparece explícita; c) que no hemos necesitado transformar valores a precios, lo cual es muy sugestivo; d) que los supuestos implicados son los mínimos necesarios para dar la demostración, aunque son admisible otros supuestos que lleven al mismo resultado.

III - TRANSFORMACIÓN DE VALORES A PRECIOS³⁶

1- Introducción

Pretende ser este un trabajo creativo del manido problema de la transformación de valores a precios. Para algunos este problema está resuelto, para otros, no. Claro está que todo depende de las hipótesis de partida y de los problemas que se trata de resolver. No es este una recopilación histórica del problema. Nada más lejos de mi intención, dado que existen ya excelentes trabajos al respecto, tanto en inglés como alguno en español. Desde que Böhm-Bawerk analizó el problema en Marx (III libro de “El Capital”) y llegó a la conclusión de que todo el sistema marxiano era irrecuperable por no dar el germano con la solución correcta -que no la dio- y con Samuelson más tarde, proclamando su inutilidad aunque se hallara una solución correcta, ha decaído el peso de su importancia. Sin embargo es difícil huir de ello a pesar de que no me parece trascendente, ni se va a derribar el sistema marxiano para disgusto de la memoria del austríaco por no dar con una solución lógico-matemática al problema. Soluciones existen. Aquí se apunta alguna original. Algunas se presentan como la raíz de un posible método de planificación o de guía para la política económica desde lo público. Cualquiera que observe las teorías económicas, los armazones en los que se sostienen los análisis económicos, se puede comprobar que casi toda la teoría está en crisis, porque lo que derriban los paradigmas no son el surgimiento de nuevo paradigmas -como algún historiador de la ciencia ha pretendido sostener-, sino que es la propia realidad las que lo derriban. En la fecha en la que escribo, a finales del año 2009, la mayor recesión económica desde la Gran Depresión del 29 ha derribado el paradigma neoliberal -neoclásico en la teoría pura- del sólo mercado y de que el Estado es el problema y el mercado la solución. Con el Cambridge inglés de los años 30 de Robinson, Kaldor, Sraffa, Dobb, etc., se produjo la primera crisis de la teoría³⁷; los períodos de inflación han martilleado las teorías keynesianas o intervencionistas de los estados a través del gasto público; ahora los teóricos neoliberales balbucean pero no saben que

³⁶ Una excelente introducción al problema véase “Un vistazo histórico y metodológico al problema de la transformación de valores a precios de producción”, por Ian J. Seda-Irizarry, en internet: <http://economia.uprrp.edu/notas%20de%20clase%2012.pdf>

³⁷ Joan Robinson dice en sus Ensayos críticos (*Collected Economic Papers*) que es la segunda, porque la primera data -según ella- de los años 20.

decir, aunque se puede afirmar que la vuelta -creo que coyuntural, por desgracia- de un keynesianismo limitado en el tiempo y en la intensidad han salvado el sistema. Ni la micro neoclásica de los mercados ni la macro de las expectativas racionales han sido paradigmas que hayan dado mecanismo solventes de acción a la política económica y a los políticos en los períodos de crisis.

Con un Marx actualizado, con Sraffa, Leontief, Morishima, Newmann, Passinetti, Garegnani, Steedman, Kurz, etc., se puede afirmar que ha abierto la teoría económica a un nuevo paradigma en la teoría: la mesoeconomía. No es que se esté ahora dando los pasos teóricos, porque estos comienzan con Sraffa en los años 30 y antes con Marx, sino que, derribados los existentes, acabarán imponiéndose otros. La mesoeconomía -o como quiera llamársele- sería el estudio y *la construcción de una teoría* de las relaciones económicas de producción, distribución y consumo entre los sectores de la economía. La micro estudia los mercados; la macro de raíz keynesiana, los aspectos globales de la economía centrada en unas cuantas variables producto de agregaciones. Ha de haber de alguna manera una teoría de las interrelaciones sectoriales más allá de los análisis input-output más o menos empíricos.

Este trabajo es una modesta contribución a dar contenido lógico-matemático correcto al problema de la transformación, porque pasar de los valores a los precios de producción y luego si es posible a los de mercado -toda esta cadena- sí puede ser importante para ayudar al nuevo paradigma a abrirse paso *en el mercado de los conocimientos* que se enseñan, que no ocurrirá si permanecen atesorados sólo entre los especialistas y entre olvidadas tesis doctorales.

2 - La crítica de Steedman

Un libro clásico sobre el problema de la transformación es el de Ian Steedman, *Marx after Sraffa*, publicado en inglés en 1977. El autor dedica todo un libro al tema que surgió en Marx en el I tomo de El Capital y que intentó resolverlo en el III tomo. Ya señaló Bortkiewicz el error de pasar de valores a precios, sustituyendo la plusvalía medida en términos de valor³⁸ por la ganancia media calculada como el cociente de la plusvalía absoluta dividida entre la suma de los capitales constante y variable. Marx también igualaba la plusvalía total a las ganancias totales y el valor agregado de la producción (en términos de precios) al valor agregado en términos de valor-trabajo. Desde entonces se ha hablado de dos cosas diferentes: error y/o contradicción casi de forma sinónima. Aquí vamos a concretar cuál es cuál y ello nos llevará a una sorpresa. Sí se puede afirmar que Marx cometió un error conceptual -del que era consciente perfectamente- al sumar valores con precios, es decir, al sumar los capitales constante y variable a la plusvalía transformada en ganancia, porque los capitalistas -ahora se les llama empresarios- intercambian, compran y venden sus productos a sus precios, y eso incluye la compra-venta entre las propias empresas. Steedman llega a decir: “*La idea de que la ganancia total es igual a plusvalía total es tan falsa como la idea de que $S/(V+C)$ es la tasa de ganancia*”³⁹. Buena parte del libro del autor se basa en esta idea. ¿Tiene razón Steedman y Marx se equivocó también en esta última parte, es decir, en la que atañe a la tasa de plusvalía y a la tasa de ganancia? Veamos quién tenía razón. Partimos de la ecuación matricial (1) que define el sistema de precios:

$$(1) \quad \underset{1 \times n \quad n \times n}{PY} = \left[\underset{1 \times n \quad n \times n}{Lw + P X} \right] \times \underset{n \times n}{(1 + g)}$$

38 Como vamos a hablar mucho de valor y valor-trabajo, merece la pena traer a colación, al menos por una vez, qué entendía Marx por valor: “*El valor de la mercancía se determina por el tiempo de trabajo necesario contenido en ellas y no por el tiempo de trabajo que en ellas se encierra*” (El Capital, pág. 100, FDE). Y a continuación Marx señala que es el capital el que acorta el tiempo de trabajo necesario; son más las horas de trabajo *potenciales* que *reales* las que dan valor, siendo la competencia el catalizador que permite el acortamiento de las horas de trabajo necesarias socialmente. Esto está íntimamente relacionado con su concepción de trabajo abstracto y concreto. Pero no tenemos espacio para seguir por ahí; por otro lado hay ya muchos estudios hechos al respecto (en español: “Karl Marx, economista”, Enrique M. Ureña, 1977, edit. Tecnos)

³⁹ “Marx, Sraffa y el problema de la transformación”, pág. 46, FCE.

con n precios (\mathbf{p}), n productos finales (\mathbf{Y}), n inputs de trabajo directo (\mathbf{L}), $n \times n$ medios de producción (\mathbf{X}) y n tasas de ganancia (\mathbf{g})⁴⁰. Y (2) que es la que define el sistema de valores marxiano para n sectores:

$$(2) \quad \underset{1 \times n \quad n \times n \quad n \times n}{\Lambda} \mathbf{Y} \boldsymbol{\mu} = \underset{1 \times n \quad n \times n}{\mathbf{C}} \boldsymbol{\mu} + \underset{1 \times n \quad n \times n}{\mathbf{V}} \boldsymbol{\mu} + \underset{1 \times n \quad n \times n}{\mathbf{S}} \boldsymbol{\mu}$$

donde $\boldsymbol{\mu}$ es la matriz diagonal de *coeficientes de transformación* de valores a precios, \mathbf{C} , \mathbf{S} y \mathbf{V} son los *capitales constante, variable y la plusvalía*, respectivamente, de cada sector y Λ es *el valor agregado unitario* del producto total de cada sector medido en horas de trabajo por producto. Marx hizo el supuesto de que las plusvalías totales fueran igual a las ganancias totales. Nosotros haremos que *la plusvalía de cada sector* (o mercancía) en términos de valor sea igual a *la ganancia total de cada sector* en términos de precio, lo cual es un supuesto aún más exigente que el del propio de Marx, es decir, haremos:

$$(3) \quad \left[\underset{1 \times n \quad n \times n}{\mathbf{LW}} + \underset{1 \times n \quad n \times n}{\mathbf{PX}} \right] \underset{n \times n}{\mathbf{g}} = \underset{1 \times n \quad n \times n}{\mathbf{S}} \boldsymbol{\mu}$$

La segunda condición en la transformación de valores a precios que impuso Marx, es decir, la de la igualdad del producto total en términos de precios al producto en términos de valor no es necesaria en este contexto, pero sí lo son otras dos condiciones de equilibrio que también están en Marx, que proceden de la filosofía del *tableau* de Quesnay. Estas condiciones o similares se aplican cuando queremos valorar la capacidad de reproducción del sistema y de su acumulación. En definitiva, igualaremos -dentro de la filosofía marxiana- *la masa de salarios* (\mathbf{Lw}) con *el capital variable* de todos los sectores que producen mercancías-salarios, es decir, las que consumen los trabajadores directos y sus familias (\mathbf{Vu}), por un lado; por otro, igualaremos también *los capitales constante* (\mathbf{Cu}) con los sectores de *medios de producción* (\mathbf{pX}), y quedará reflejado todo ello en las ecuaciones que siguen:

$$(4) \quad \mathbf{Lw} = \mathbf{Vu}$$

⁴⁰ tanto \mathbf{w} , \mathbf{Y} , \mathbf{g} son matrices diagonales, donde todos sus elementos son cero, salvo los de la diagonal principal.

$$(5) \quad P X = C \mu$$

Al proceder así hacemos que el sistema encuentre su equilibrio y su reproducción igualando ofertas con demandas: la de los bienes-salario (mercaderías en Marx) con los salarios de los trabajadores que los van a consumir; la amortización de los medios de producción con nuevos medios que se igualan en términos de valor (no necesariamente en término físicos), y la de las plusvalías que derivarán en demandas de bienes no salariales por parte de los capitalistas. Estos 3 sistemas de ecuaciones matriciales supone el cumplimiento también de la igualación de (1) y (2), es decir, la (6) no es una nueva condición, sino una combinación lineal de (3), (4) y (5)⁴¹. Esta ecuación es:

$$(6) \quad \boxed{P Y = \Lambda Y \mu}$$

Si Steedman hubiera hecho estas consideraciones sobre el sistema marxiano en términos de valor y el sistema de ecuaciones que definen al sistema en términos de precios se hubiera llevado una sorpresa y, en cualquier caso, nadie hubiera podido acusarle de alejarse del espíritu marxiano en el capítulo de la reproducción simple del sistema capitalista. No lo hizo y no se percató de lo que sigue. De (3) podemos despejar *la tasa de ganancia* (g_j) de cada sector gracias a que se trata de una matriz diagonal con ceros en todos los elementos en los que $i \neq j$:

$$(7) \quad g_j = \frac{S_j \mu_j}{l_j w_j + \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_{ij}} \quad \text{para } j = 1 \text{ a } n$$

y lo mismo hacemos con (4) y (5) y queda:

$$(8) \quad u_j = \frac{l_j w_j}{V_j} \quad \text{para } j = 1 \text{ a } n$$

$$(9) \quad \sum_{i=1}^{i=n} p_i x_{ij} = C_j \mu_j \quad \text{para } j = 1 \text{ a } n$$

y si se procede a la sustitución de (8) y (9) en (7), Steedman se llevaría un disgusto o una sorpresa si viera la ecuación resultante:

⁴¹ De hecho es su suma.

$$(10) \quad g_j (\text{tasa de ganancia}) = \frac{S_j}{C_j + V_j} (\text{tasa de plusvalía})$$

para todo $j = 1$ a n

Es decir, *la tasa de ganancia de cada sector (sean 3 sectores, como en los ejemplos de Marx, o n sectores, como aquí) definida en términos de precios por la ecuación (1) del sistema, es igual a la tasa de plusvalía marxiana en términos de valor-trabajo (definida por la ecuación (2)).*

Lo notable de la demostración es que hemos utilizado los coeficientes de transformación como puente desde la (2) a la (10), pero al final han desaparecido (igual que la razón-patrón *esrafiana*, que se utiliza como medida del excedente y de beneficios máximos del sistema, pero no es necesario calcularla). Steedman estaba equivocado y Marx tenía justificación al usar la tasa de ganancia como equivalente a la tasa de plusvalía. Y por si fuera poco, no ha hecho falta suponer tampoco tipo de ganancia cero y composiciones orgánicas de capital determinadas para llegar a (10)⁴². Las dificultades surgen cuando emplea Marx una *sola tasa de ganancia* y sustituye la plusvalía por las ganancias obtenidas a partir de esta tasa global en función de los capitales constante y variable de cada sector. Es decir, lo que es cierto para cada tasa de ganancia (como aquí se ha demostrado), no lo es para una única tasa de ganancia. Claro que Marx tenía sus razones para obrar así porque el germano tomaba una sola tasa por dos cosas: como primer paso para demostrar que los precios comerciales o de venta giran *gravitatoriamente* en torno a los precios de producción derivados a partir de una tasa única de ganancia global; y porque así preparaba el capítulo de la decadencia del sistema capitalista a partir de el descenso histórico de la *tasa de ganancia global*. El otro error de Marx es querer sumar las ganancias así obtenidas con los capitales constantes y variables en términos de valor; ahí han tenido razón Böhm-Bawerk, Bortkiewicz, Dmitriev, Samuelson, Steedman, etc. y... el propio Marx, que ya lo explicitó en el III tomo del Capital -elaborado incluso antes que el I, como sabemos- y que era perfectamente consciente del problema al redactarlo. No hay pues contradicción en la manera que usa Marx sus ecuaciones del sistema para pasar de los valores-trabajo a los precios (de producción, hay que suponer) y sí error al sumar, como

⁴² Cosa que deberíamos hacer si no hubiéramos supuesto las igualdades (3), (4) y (5) conjuntamente y por sectores (o en su caso por mercancías).

diría un castellano, churras (valores) con merinas (precios). Nunca llegó Marx a solucionar el problema que el mismo había planteado por falta de herramientas matemáticas⁴³: de poder hacerlo, se hubiera dado cuenta de otro problema más poderoso, que veremos en próximos epígrafes.

⁴³ Aún no se había demostrado el teorema (teoremas) de Perron-Frobenius, o no se habían “inventado” las cadenas de Markov o la programación lineal.

3 - La solución de Bortkiewicz y su generalización

Se tiene al economista ruso como el primero que dio una solución lógica correcta al problema planteado por Marx en el tomo III de la transformación de valores a precios. En efecto, Marx pasó a precios la ganancia de cada sector (o mercancía) de la economía, sustituyendo la plusvalía de cada sector por la ganancia obtenida al multiplicar la suma de los capitales constante y variable sectoriales por la tasa de ganancia global. Pero ahí se quedó y nada hizo más con los valores de los capitales constante (medios de producción) y variable (masa de salarios). Bortkiewicz planteó con un ejemplo el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(\dots) \quad (1 + g)(225x + 90y) = 375z$$

$$(11) \quad (1 + g)(100x + 120y) = 300z$$

$$(\dots) \quad (1 + g)(50x + 90y) = 200z$$

donde x , y , z serían los coeficientes de transformación que harían posible pasar de valores a precios de producción una vez calculados y sustituidos su valor en (11). Se puede comprobar además que el esquema de realidad dibujado levemente por el sistema (11) tiene la bondad de permitir su reproducción simple, puesto que la suma por columnas para el capital constante nos da la suma en términos de valor del sector primero de medios de producción, y la segunda suma -la del capital variable- se iguala al valor de lo producido en el sector de bienes-salario (fila 2). Surge el problema de que tenemos 3 ecuaciones y 4 incógnitas, y eso parece un pecado, porque ese grado de libertad haría depender una variable de otra con una infinidad de soluciones. Lo que se ha hecho tradicionalmente ha sido introducir un numerario para relativizar los precios, bien sea mediante un precio (puede ser la producción de oro y su relación estable con respecto a la moneda en curso de cada país) o bien tomar como numerario la propia renta nacional o suma vertical del valor de la producción final de todos los sectores. Lo primero es equivalente a eliminar una variable al hacerla igual a 1; lo segundo es introducir una ecuación más (como hace Sraffa en su modelo⁴⁴), con lo que igualamos -en ambos casos- el número de

⁴⁴ "Producción de mercancías por medio de mercancías".

ecuaciones e incógnitas y el sistema tiene solución⁴⁵. Con esto se soluciona en efecto el modelo desde el punto de vista lógico-matemático; cosa distinta es si las ecuaciones, hipótesis o numerarios empleados siguen el espíritu marxiano o se apartan de él. Sobre ello hay trabajos ya hechos y no voy a entrar. En cambio -y este es el objeto del epígrafe- me parece que el modelo del ruso padece un error de partida: que el número de sectores es sólo de **3**. Y eso suele ocurrir cuando se toman los modelos -aparentemente inocentes- de Marx, de epígonos y críticos (Böhm-Bawerk, etc.) casi sin pensar, de forma natural, porque de partir -como hipótesis- de **4** sectores entonces, por ejemplo, tendríamos más ecuaciones que incógnitas; otras veces, al multiplicar el número de sectores, son más las incógnitas que las ecuaciones. Por todo esto no valen hipótesis sobre un número de ecuaciones determinados sino sobre un número *n* indefinido de sectores con su correspondiente número de ecuaciones. Veremos entonces como surgen de forma natural y a la luz algunos problemas que en los casos particulares no se perciben. Y también son válidas -aunque no es lo habitual- que el número de ecuaciones sea menor que el de incógnitas, porque aún cuando no resolvamos el sistema para obtener valores concretos de las variables, es útil manejar modelos en los que podamos ver cómo unas variables dependan de otras y bajo qué condiciones. Buscar soluciones -que la mayoría de las veces además son de equilibrio- es una obsesión marginalista que esconde una ideología concreta, que es la siguiente: las fuerzas e inercias de la economía, ocultas o a la luz, son impersonales, no tienen nombre y apellido, las producen normalmente los mercados, nos dicen lo que podemos cobrar, las cantidades a consumir, el precio que hay que poner a los bienes finales e intermedios, las amortizaciones que hay que llevar a cabo. Es en efecto -según esta ideología- una especie de mano invisible, como el dios católico que nada pasa sin que sea obra su hacedor supremo. Vemos que hasta un simple sistema de ecuaciones esconde ideologías, deseos y complicidades. Pero, en cualquier caso, permite asentar las hipótesis y su proceso lógico, tanto histórico como meramente matemático de forma correcta: más vale un poco de lógica que un mucho de vergonzante retórica. Pero sigamos con Bortkiewicz. El sistema generalizado de ecuaciones a lo Bortkiewicz podría expresarse de la siguiente manera:

⁴⁵ Desechamos el caso de que por pura casualidad una de las ecuaciones fuera combinación lineal del resto.

$$(\dots) \quad C_1 + V_1 + S_1 = \Lambda_1 Y_1 \rightarrow C_1 a_1 + V_1 b_1 + S_1 c_1 = \Lambda_1 Y_1 u_1$$

$$(12) \quad \text{-----}$$

$$(\dots) \quad C_n + V_n + S_n = \Lambda_n Y_n \rightarrow C_n a_n + V_n b_n + S_n c_n = \Lambda_n Y_n u_n$$

para n sectores

donde C , V y S son los capitales constantes, variables y plusvalías marxianas de cada sector; a , b , c , u son los coeficientes de transformación de valores a precios, “ Λ ” es el valor unitario total del sector correspondiente y, por último, Y es el producto final del sector en términos físicos. El problema de la transformación se plantea como la necesidad de calcular los coeficientes a , b , c y u de tal forma que se puede pasar del lado izquierdo de las ecuaciones (11) -en términos de valor- a las del lado derecho -en términos de precio-. La ecuación general sería:

$$(12) \quad C_i + V_i + S_i = \Lambda_i Y_i \rightarrow C_i a_i + V_i b_i + S_i c_i = \Lambda_i Y_i u_i \quad \text{para } i=1 \text{ a } n$$

Casi a simple vista se ve la naturaleza del problema: tenemos n ecuaciones y $4n$ incógnitas ($n a_i + n b_i + n c_i + n u_i$). El sistema tiene por tanto $3n$ grados de libertad: una barbaridad, al menos desde algunas concepciones económicas buscadoras de existencias de equilibrios, precios que vacían los mercados y demandas que casan con ofertas. A partir de aquí, según se hagan diferentes hipótesis, tendremos diferentes soluciones y la discusión girará no sobre la corrección lógica-matemática descriptor del sistema, sino sobre lo apropiado o no desde el punto de vista económico de las hipótesis. Por nuestra parte vamos a seguir los pasos de Marx -con alguna modificación- y diremos que:

(a) *Los valores finales de los productos (un producto por cada sector, producción simple) en términos de valor-trabajo marxiano los igualamos a los valores en términos de precio.*

Marx no llegó tan lejos y estableció como hipótesis que la suma de los valores finales fueran iguales a la suma de los productos totales en términos de precio. Sin embargo, con esta hipótesis sólo añadimos una ecuación más al sistema y nada soluciona; con la hipótesis (a)

añadimos n ecuaciones. Esta hipótesis es equivalente a dar el valor de 1 al coeficiente u_i desde $i=1$ a n . Pero aún tenemos $2n$ grados de libertad ($3n$ incógnitas y n ecuaciones). Por esos vamos a añadir otra hipótesis, y esta vez enteramente marxiana:

(b) *Se igualarán las plusvalías de cada sector a sus ganancias correspondientes, calculadas a partir de la tasa ganancia global de la economía.*

Para lo anterior debemos calcular *la tasa global de ganancia (G)* como:

$$(13) \quad G = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} C_i + \sum_{i=1}^{i=n} V_i}$$

A partir de esta ecuación podemos escribir el siguiente sistema de n ecuaciones:

$$(14) \quad (C_i a_i + V_i b_i)(1 + G) = S_i c_i \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

donde hemos igualado la plusvalía de cada sector (o mercancía) - expresada en el lado derecho de la ecuación- con las ganancias en términos de precio, de acuerdo con la hipótesis marxiana (b). Ahora hemos reducido un grado de libertad, pero aún tenemos n ecuaciones libres y, por tanto, n grados de libertad. Por eso y por último, inspirados en Marx o directamente de su visión global de la explotación -y al igual que la de la tasa de ganancia como fuerza motriz, como atractor de tendencias-, vamos a sentar la tercera y última hipótesis:

(c) *Calculada la tasa de explotación global, pasaremos al sistema de precios a partir de la hipótesis de que las tasas de explotación sean iguales en términos de precios, aunque no lo sean en términos de valor.*

Parece el mundo al revés, porque la tasa de explotación -alma y justificación final de todos el sistema marxiano, donde la producción y transmisión de valor se hace mediante el trabajo vivo (capital variable) que da lugar a la plusvalía y el trabajo muerto (capital constante)- se

desvela ahora en términos de precios, cuando en cambio permanecía oculto en términos de valor. La ecuación que justifica este supuesto es:

$$(15) \quad EV_i b_i = S_i c_i \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

donde E es la tasa de explotación (16):

$$(16) \quad E = \frac{\sum_{i=1}^{i=n} S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} V_i}$$

Ahora ya tenemos $3n$ ecuaciones (las (12), (14) y (15)) y $3n$ incógnitas ($na_i + nb_i + nc_i$), con lo cual el sistema tiene solución. Lo que sigue son las fórmulas de obtención de los coeficientes simplemente resolviendo el sistema de $3n$ ecuaciones mencionado. De ello salen los $3n$ coeficientes de transformación:

$$(17) \quad a_i = \frac{\Lambda_i Y_i (E - G)}{C_i E (1 + G)} \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

$$(18) \quad b_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{V_i E (1 + G)} \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

$$(19) \quad c_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{S_i (1 + G)} \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

y estos coeficientes -así calculados-, reemplazados en (12), nos dan los precios de producción de acuerdo con las hipótesis planteadas (ver anexo 1). La solución originada no depende del caso particular de que tengamos tres ecuaciones o que debamos emplear un numerario para reducir el número de incógnitas; esta una solución general de acuerdo con las hipótesis planteadas. Samuelson, por tanto, también se equivocaba cuando niega la posibilidad de pasar de valores a “precios de producción”⁴⁶.

⁴⁶ “*Understanding the Marxian notion of Exploitation*”, 1971. No obstante podemos hacer una concesión a Samuelson. En efecto, estos “precios de producción” están entrecomillados porque su obtención no tienen porqué coincidir con los obtenidos mediante la ecuación que define el sistema en términos de precios de producción:

$$p \begin{matrix} Y \\ \text{1 xn} \end{matrix} = \left[L \begin{matrix} w \\ \text{1 xn} \end{matrix} + p \begin{matrix} X \\ \text{1 xn} \end{matrix} \right] \times \left(1 + \begin{matrix} g \\ \text{nxn} \end{matrix} \right)$$

Sin embargo, como la felicidad no puede ser completa ni eterna, cuando se plantea en un sistema marxiano de ecuaciones las hipótesis de la sustitución de las plusvalías por las ganancias a partir de la tasa de ganancia global y la igualdad de las tasa de explotación, por más que puedan justificarse desde una interpretación ortodoxa de Marx, surge un problema: que al hacer simultáneas esas hipótesis produce un corolario desagradable: *se igualan las composiciones orgánicas de capital en términos de precios, aunque no lo hayan estado en términos de valor-trabajo*. En efecto, de las definiciones de tasa de ganancia, tasa de plusvalía que ya hemos visto y de composición orgánica de capital “ θ ” como cociente entre el capital constante y el variable, surge inevitablemente la ecuación:

$$(20) \quad G = \frac{E}{1 + \theta}$$

O dicho de otro modo, establecer o partir de dos de estas tres hipótesis es como hacerlo con las tres. Aún así, es mejor que sea un corolario a que sea una hipótesis de partida.

Podríamos llamar pues a los precios obtenidos a través del sistema de valores-trabajo de este epígrafe “*valores unitarios finales de producción*” para evitar confusiones y dejar al economista americano tranquilo.

$$(\dots) \quad \sum_1^n C_i a_i = \sum_1^r C_i a_i + \sum_1^r V_i b_i + G \times (\sum_1^r C_i a_i + \sum_1^r V_i b_i)$$

$$(22) \quad \sum_1^n V_i b_i = \sum_{r+1}^s C_i a_i + \sum_{r+1}^s V_i b_i + G \times (\sum_{r+1}^s C_i a_i + \sum_{r+1}^s V_i b_i)$$

$$(\dots) \quad \sum_1^n S_i c_i = \sum_{s+1}^n C_i a_i + \sum_{s+1}^n V_i b_i + G \times (\sum_{s+1}^n C_i a_i + \sum_{s+1}^n V_i b_i)$$

siendo $0 < r < s < n$

Tras eliminar los elementos comunes de los dos lados del sistema de ecuaciones anterior, quedan estos sistemas -que podemos llamar de equilibrio, porque nada motivaría a la economía internamente a cambiar sus niveles de producción⁴⁸ y de demanda- como siguen. Las ecuaciones de (22) son ahora:

$$(23) \quad \sum_{r+1}^n C_i a_i = \sum_1^r V_i b_i + \sum_1^r S_i c_i$$

$$(24) \quad \sum_1^r V_i b_i + \sum_{s+1}^n V_i b_i = \sum_{r+1}^s C_i a_i + \sum_{r+1}^s S_i c_i$$

$$(25) \quad \sum_1^s S_i c_i = \sum_{s+1}^n C_i a_i + \sum_{s+1}^n V_i b_i$$

y sustituyendo la (23) y (25) en la (24), se obtiene la ecuación básica de la reproducción simple:

$$(26) \quad \sum_{s+1}^n C_i a_i + \sum_{s+1}^n V_i b_i = G(\sum_1^s C_i a_i + \sum_1^s S_i c_i)$$

que puede ser leído como que: *en la reproducción simple, donde se han igualado los capitales constantes de los medios de producción a los sectores productores de estos en términos de valor, donde se ha hecho lo mismo con los capitales variables (masa de salarios) con la oferta de bienes-salario, y las plusvalías con los sectores productores de bienes no salariales, el resultado es un equilibrio entre capitales y sectores de producción tales que los capitales constantes de los sectores de bienes no salariales más los capitales variables de estos mismo sectores se igualan al producto de la tasa de ganancia general marxiana (**G**) por la suma de los capitales constantes de los sectores*

⁴⁸ Hay que suponer dados, en términos de valor (aunque no necesariamente física), las características técnicas de producción ($Y=AX$, siendo **A** la matriz de requerimientos), los inputs de trabajo **L** y las pautas de consumo.

de medios y bienes salariales más las plusvalías de estos mismos sectores.

Se da un ejemplo de todo ello en el anexo II, donde se ha utilizado como ayuda la programación lineal para pasar de un sistema de no reproducción a otro de reproducción simple acorde con lo comentado en este epígrafe. Si se examina la conclusión anterior, se puede constatar que los capitales constantes de los medios de producción ($\sum_1^r C_i a_i$), los capitales variables de los sectores de producción de bienes salariales ($\sum_{r+1}^s V_i b_i$) y las plusvalías de los sectores de bienes no salariales ($\sum_{s+1}^n S_i c_i$) no perturban ni descuadran la reproducción simple, sean cuales sean los niveles de sus capitales.

Observando el anexo II y las consideraciones anteriores, aún con un esquema tan simple, nos da para una guía para la planificación. En efecto, nos dice qué sectores no cuadran los capitales empleados (las columnas) -que generan demandas- con la producción de bienes y servicios (las filas); cuáles generan ofertas y cuáles debemos aumentar y cuáles disminuir; también nos dicen cómo han de variar los precios de producción en función de los valores unitarios.

5 - Transformación proporcional a las sumas

Para rematar este artículo se presenta en este epígrafe una transformación alternativa a la de los epígrafes anteriores que presenta dos curiosas propiedades. Que existan varias y no una sólo posibilidades de esta transformación se debe a que los modelos suelen presentar más incógnitas que ecuaciones cuando pasamos de las 3 habituales a “ n ”; también que son factibles diversas hipótesis. En este caso partimos de las sumas, tanto verticales como horizontales, que nos da la matriz original de capitales en términos de valor, y de lo que se trata es de hallar los sumandos, lo cual es siempre posible si lo hacemos de acuerdo con las ecuaciones que siguen:

$$(27) \quad C_{p,i} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_{i=1}^{i=n} C_i}{\sum_{i=1}^{i=n} (C_i + V_i + S_i)} \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

$$(28) \quad V_{p,i} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_{i=1}^{i=n} V_i}{\sum_{i=1}^{i=n} (C_i + V_i + S_i)} \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

$$(29) \quad S_{p,i} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_{i=1}^{i=n} S_i}{\sum_{i=1}^{i=n} (C_i + V_i + S_i)} \quad \text{para } i = 1 \text{ a } n$$

siendo C_{pi} , S_{pi} y V_{pi} los capitales contante, variable y plusvalías transformados de cada sector i .

En principio, el sentido económico de esta transformación sería el de que los valores transformados dependerían proporcionalmente del valor de sus sumas respectivas, es decir, de su propio peso, así como del peso del resto de los otros 2 capitales, cuya suma es el valor final del sector (filas); también dependería proporcionalmente del peso de la suma de los capitales que representa su modalidad (o constante, o variable o plusvalías, es decir, por columnas)⁴⁹. Lo notable es que esta transformación presente 3 propiedades que no se perciben a simple vista:

(a) *Las plusvalías transformadas de acuerdo con (29) son las mismas que las que surgen de la transformación marxiana a partir de la tasa de plusvalía global (13).*

⁴⁹ Para una mayor comprensión véase el anexo III.

En efecto, sean S_{mi} y S_{pi} las plusvalías derivadas de la transformación marxiana por medio de la cuota global de plusvalía y las plusvalías que surgen del método de proporcionalidad, respectivamente, de acuerdo con las ecuaciones:

$$(30) \quad S_{mi} = (C_i + V_i) \times G \quad \text{siendo } G = \frac{\sum_i^n S_i}{\sum_i^n (C_i + V_i)} \quad \text{para todo } i = 1 \text{ a } n$$

$$(31) \quad S_{pi} = \frac{(C_i + V_i) \times \sum_i^n S_i}{\sum_i^n (C_i + V_i)} \quad \text{por criterio de proporcionalidad}$$

por simple sustitución de G en (30) se ve que $S_{mi} = S_{pi}$

Y con las tasas de explotación (E) y composición orgánica de capital (COC) ocurre algo análogo a partir de las ecuaciones (27), (28) y (29), es decir $E_m = E_{pi}$ y $COC_m = COC_{pi}$, para todo $i=1$ a n ⁵⁰. Dicho de otra manera, las tasas globales de explotación (E_{pi}) y composiciones orgánicas (COC_{pi}) que surgen por el método proporcional de todos los sectores (i), son iguales entre sí e iguales a su vez a las tasas de explotación globales marxianas (E_m) y a las composiciones orgánicas globales marxianas (COC_m), respectivamente (ver anexo III).

(b) *Los coeficientes de transformación (y por tanto los valores) que surgen por el método de proporcionalidad (a la sumas dadas de filas y columnas) son los mismos que los coeficientes que obtenidos por el método de Bortkiewicz generalizado*⁵¹.

Esta vez nada hacía presagiar este notable resultado y la demostración es más larga, pero conceptualmente es sencilla. Partimos de los coeficientes obtenidos (17), (18) y (19) por Bortkiewicz generalizado:

$$(32) \quad a_i = \frac{\Lambda_i Y_i (E - G)}{C_i E (1 + G)} \quad b_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{V_i E (1 + G)} \quad c_i = \frac{\Lambda_i Y_i G}{S_i (1 + G)}$$

Ahora sólo queda desarrollar las ecuaciones anteriores por sus definiciones:

⁵⁰ Se deja como ejercicio lúdico al lector.

⁵¹ Ver epígrafe 3.

$$(33) \quad \Lambda_i Y_i = C_i + V_i + S_i \quad E_i = S_i / V_i \quad G = \frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i)}$$

y calcular los coeficientes transformados Ca_i , Vb_i , Sc_i :

$$(34) \quad Ca_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \left[\frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n V_i} - \frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i)} \right]}{\frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n V_i} \times \left[1 + \frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i)} \right]} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_1^n C_i}{\sum_1^n (C_i + V_i + S_i)} = C_{pi}$$

$$(35) \quad Vb_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \left[\frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i)} \right]}{\frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n V_i} \times \left[1 + \frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i)} \right]} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_1^n V_i}{\sum_1^n (C_i + V_i + S_i)} = V_{pi}$$

$$(36) \quad Sc_i = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \left[\frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i)} \right]}{\left[1 + \frac{\sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i)} \right]} = \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i + S_i)} = S_{pi}$$

siendo, como se sabe, C_{pi} V_{pi} S_{pi} los capitales contante, variable y plusvalías, respectivamente, obtenidos por el método de este epígrafe, es decir, por el de proporcionalidad a las sumas (a filas y columnas). Nada hacía sospechar este resultado, porque los coeficientes obtenidos por el método de Bortkiewicz generalizado lo fueron con la condición de la reproducción simple, es decir, por la igualación de las sumas de los capitales constantes a todos los sectores productores de medios de producción, por semejante igualación de las sumas de los capitales variables a todos los sectores productores de bienes-salario, y, por último, también por igualación de todas las plusvalías a los sectores productores de bienes-no salariales; en cambio, por el método de proporcionalidad a las sumas no se exige ninguna hipótesis económica de reproducción del sistema del tipo que sea. Realmente notable.

(c) *Calculado los valores y los coeficientes de transformación por este método, es decir, por el método de la proporcionalidad a las sumas dadas, cuando se recalcula el valor de la plusvalía (ganancia ya) con el criterio marxiano, el resultado es el mismo que el valor original.*

Sea Sp_i las ganancias obtenidas por el método de proporcionalidad y sea Sm_i de nuevos las ganancias recalculadas por el método marxiano a partir de Sp_i . Las ecuaciones que definen ambas ganancias son como sigue:

$$(37) \quad \begin{aligned} Sp_i &= \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_1^n S_i}{\sum_1^n (C_i + V_i + S_i)} && \text{para } i=1 \text{ a } n \\ Cp_i &= \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_1^n C_i}{\sum_1^n (C_i + V_i + S_i)} && \text{para } i=1 \text{ a } n \\ Vp_i &= \frac{(C_i + V_i + S_i) \times \sum_1^n V_i}{\sum_1^n (C_i + V_i + S_i)} && \text{para } i=1 \text{ a } n \end{aligned}$$

$$(38) \quad Sm_i = (Cp_i + Vp_i) \times G \quad \text{siendo} \quad G = \frac{\sum_1^n Sp_i}{\sum_1^n (Cp_i + Vp_i)} \quad \text{para } i=1 \text{ a } n$$

y sustituyendo G y (37) en (38) se obtiene que $Sm_i = Sp_i$ tras un ejercicio de álgebra elemental⁵². Dicho de otra forma, el cálculo de la tasa de ganancia marxiana es un *invariante* respecto al cálculo de los precios por el método de proporcionalidad (a las sumas).

⁵² Se deja para entretenimiento del lector.

ANEXO I: La transformación de Bortkiewicz y su generalización

anexo I: Transformación a lo Bortkiewicz generalizada

	Valores originales			Valores	Valores unitarios	tasa de explot.	tasa de ganancia	COC
	C	V	S					
1	56	14	35	105	1,88	2,500	50,0%	4,000
2	32	4	9	45	5,63	2,250	25,0%	8,000
3	24	2	7	33	0,69	3,500	26,9%	12,000
	112	20	51	183		2,550	38,6%	5,600

tasa de ganancia global=G= 38,6%

tasa de explotación global=E= 2,55

coeficientes a,b,c de C,V,S, respectivamente

sectores	a	b	c
1	1,148	0,820	0,836
2	0,861	1,230	1,393
3	0,842	1,803	1,314

sectores	Valores transformados			DY	precios de producción	tasa de explot.	tasa de ganancia	COC
	C	V	S					
1	64,3	11,5	29,3	105,0	1,88	2,550	38,6%	5,600
2	27,5	4,9	12,5	45,0	5,63	2,550	38,6%	5,600
3	20,2	3,6	9,2	33,0	0,69	2,550	38,6%	5,600
	112,0	20,0	51,0	183,0		2,550	38,6%	5,600

Diferencia entre transformados y originales

sectores	C	V	S	
1	13,7%	-19,8%	-17,9%	0,0%
2	-15,0%	20,6%	32,9%	0,0%
3	-17,2%	57,3%	27,1%	0,0%
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

COC = composición orgánica de capital

En este cuadro se muestra un ejemplo de transformación de valores a precios a partir de los datos recuadrados en amarillo (primera tabla encabezada por los capitales constante (C), variable (V) y plusvalías (S)). Aplicando las ecuaciones (17), (18) y (19) obtenemos *los coeficientes de transformación a, b y c*; y, a partir de ahí, los precios (*valores transformados unitarios, 1,88, 05,63 y 0,69*). Como curiosidad acabamos con la “diferencia entre valores transformados y originales” (los de partida). Como puede comprobarse, los precios unitarios originales y transformados coinciden por los supuestos de igualdad de valores iniciales a precios y de suma vertical de capitales. Bajo otros supuestos, los precios originales y transformados diferirían. Aquí lo que importa es el cálculo de los

coeficientes de transformación. Se han respetado 3 sectores, pero pueden ser n , puesto que tenemos $3n$ coeficientes de transformación y $3n$ sistemas de ecuaciones ((17), (18) y (19)).

ANEXO II: Reproducción simple con tasa de ganancia marxiana

anexo II: Transformación de Valores a Precios con programación

Demandas menos Ofertas		datos originales: capitales					g=		valores unitarios	
sectores		C	V	S	DY	S(C+V)	e=S/V	COC		
24,00	medios	56,0	14,0	42,0	112,0	60,0%	3,00	4,0	2,333	
-7,00	salariales	32,0	4,0	12,0	48,0	33,3%	3,00	8,0	0,857	
-17,00	no salar.	24,0	2,0	6,0	32,0	23,1%	3,00	12,0	4,000	
0,00		109,0	93,0	77,0	279,0	38,1%	0,83	1,17		

Demandas menos Ofertas		Resultados / Valores (D) x Y							
sectores		C	V	S	DY	S(C+V)	e=S/V	COC	precios
0,0	medios	14,3	41,4	21,3	77,0	38,1%	0,51	0,35	0,096
0,0	salariales	55,3	35,2	34,5	125,0	38,1%	0,98	1,57	0,208
0,0	no salar.	7,3	48,4	21,3	77,0	38,1%	0,44	0,15	0,085
0,0		77,0	125,0	77,0	279,0	38,1%	0,62	0,62	

sectores		restricción de máximos: Valores (D) x Y						
		C	V	S	DY	S(C+V)	e=S/V	COC
medios		168,0	42,0	126,0	336,0	60,0%	3,00	0,35
salariales		96,0	12,0	36,0	144,0	33,3%	3,00	1,57
no salar.		72,0	6,0	18,0	96,0	23,1%	3,00	0,15
		168,0	18,0	54,0	240,0	29,0%	0,83	0,62
					3,00			

sectores		restricción de mínimos: Valores (D) x Y						
		C	V	S	DY	S(C+V)	e=S/V	COC
medios		18,7	4,7	14,0	37,3	60,0%	3,00	0,35
salariales		10,7	1,3	4,0	16,0	33,3%	3,00	1,57
no salar.		8,0	0,7	2,0	10,7	23,1%	3,00	0,15
		18,67	2,00	6,00	26,67	29,0%	0,83	0,62
					0,33			

matriz de productos finales				matriz de medios de producción					
sectores	1	2	3	totales	sectores	1	2	3	totales
medios	56	-	-	56	medios	110	50	40	200
salarial.	-	8	-	8	salarial.	120	125	40	285
no salar.	-	-	48	48	no salar	60	150	200	410

En este anexo dos se pueden observar las exigencias y las conclusiones del tercer epígrafe. Pasando del cuadro de “*datos originales*”, hemos llegado al de “*Resultados*” como un sistema de reproducción simple tal y como se ha exigido. Además se puede comprobar -aunque no a simple vista- que se cumple la ecuación (26): $7,3 + 48,4 = 38,12\%$ ($14,3 + 41,4 + 55,3 + 34,5$). Las matrices de restricción (de mínimos y máximos) han sido meros instrumentos para pasar de la matriz de *datos originales* a la de *Resultados*.

ANEXO III: Transformación a Valores proporcionales a las sumas

anexo III: Transformación de Valores a Precios proporcionales a las sumas

sectores	<u>Valores originales</u>			DY	Valores unitarios	tasa de ganancia	tasa de explotac.	COC
	C	V	S					
medios	56,0	14,0	35,0	105,0	2,188	50,0%	2,50	4,0
salariales	32,0	4,0	9,0	45,0	0,804	25,0%	2,25	8,0
no salar.	24,0	2,0	7,0	33,0	4,125	26,9%	3,50	12,0
	112,0	20,0	51,0	183,0		38,6%	2,55	5,6

sectores	<u>Producción física</u>			total
	C	V	S	
medios	48	-	-	48,0
salariales	-	56	-	56,0
no salar.	-	-	8	8,0
	48,0	56,0	8,0	112,0

sectores	<u>Valores transformados proporcionales</u>				Precios	tasa de ganancia	tasa de explotac.	COC
	C	V	S	DYU				
medios	64,3	11,5	29,3	105,0	2,188	38,6%	2,55	5,6
salariales	27,5	4,9	12,5	45,0	0,804	38,6%	2,55	5,6
no salar.	20,2	3,6	9,2	33,0	4,125	38,6%	2,55	5,6
	112,0	20,0	51,0	183,0		38,6%	2,55	5,6

tasa de ganancia global= 38,6%

sectores	<u>Valores transformados marxianos</u>				Precios	tasa de ganancia	tasa de explotac.	COC
	C	V	S	DYU				
medios	64,3	11,5	29,3	105,0	2,188	38,6%	2,55	5,6
salariales	27,5	4,9	12,5	45,0	0,804	38,6%	2,55	5,6
no salar.	20,2	3,6	9,2	33,0	4,125	38,6%	2,55	5,6
	112,0	20,0	51,0	183,0		38,6%	2,55	5,6

sectores	<u>Coefficientes de transformación</u>		
	C	V	S
medios	1,148	0,820	0,836
salariales	0,861	1,230	1,393
no salar.	0,842	1,803	1,314

Diferencia entre Valores transformados y originales en %

sectores	C	V	S	totales
medios	13,7%	-19,8%	-17,9%	0,0%
salariales	-15,0%	20,6%	32,9%	0,0%
no salar.	-17,2%	57,3%	27,1%	0,0%
	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%

6 – El problema de la transformación a la luz del modelo de Sraffa

No se pretende en este artículo hacer una recopilación de las soluciones que se han dado al problema planteado por Marx en su libro III de *El Capital*, sino hacer una crítica a la solución de Marx y dar una solución a la luz del libro de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías*. Sin más preámbulos diré que este problema se divide en al menos dos: 1) el de la conversión de la manera de contabilizar Marx el valor de las mercancías producidas en el modo de producción capitalista en términos de horas de trabajo y su pase a su medición en términos de precios; 2) el problema de transformar el valor creado por el trabajo con el componente de la plusvalía (medida, lógicamente, también en horas de trabajo) en ganancia (medida en unidades monetarias). El primer problema podría reducirse casi a un problema contable, pero el segundo implica una ley de comportamiento del modo de producción que Marx analiza y que resulta más que problemático. No se entra aquí a discutir los conceptos de Marx del capital contante, capital variable, plusvalía, valor de uso, valor de cambio, precio de coste, precio de producción, tasa de plusvalía, tasa de ganancia, etc. Se aceptan tal y como las expuso Marx en su obra *capital*, incluso con sus posibles contradicciones. Nos vamos a limitar a un análisis formal de la solución de Marx, su error, la solución correcta a la luz de la propia idea de Marx de transformación y la comparación de esta solución (la correcta) con la teoría de los precios de Sraffa en su obra ya mencionada.

Se considera que la primera solución al problema de la transformación la dio Bortkiewicz⁵³, aunque limitado a tres sectores y tres mercancías. No entramos en su discusión. En cambio sí tendremos en cuenta las soluciones de Ian Steedman (*Marx after Sraffa*, 1977) y las de Michio Morishima (*Marx's Economic*, 1973), siendo la que aquí

⁵³ “*Value and Price in the Marxian System*”, 1907. Un artículo histórico del problema se puede ver en Internet en: <http://economia.uprrp.edu/notas%20de%20clase%2012.pdf>, con el descriptivo título de: “*Un vistazo histórico y metodológico al problema de la transformación de valores a precios de producción*”, de Ian J. Seda-Irizarry. No obstante, el propio Bortkiewicz consideró que el primer economista que abordó el problema de forma satisfactoria fue Dmitriev en su artículo *Marx's Fundamental Theoretical Constructions in the Third Volume of Capital*, en 1907. Para M. Dobb, la primera solución del problema para n sectores la habría dado Francis Seton en su artículo *The Transformation Problem*, en *Review of Economic Studies*, XXIV, 1956-7.

se aporta la más cercana a la discusión entablada por el economista japonés en la obra a su vez ya mencionada. Marx presenta en el libro III, capítulo IX una serie de cuadros de datos con los cuales pretende dar con la solución del problema de transformar el valor de las mercancías del trabajo asalariado en “precios de las mercancías”. Damos a continuación el cuadro que presenta Marx con su misma terminología (según la traducción de Wenceslao Roces para el Fondo de Cultura Económica).

	Capital Constante	Desgaste del Capital	Capital Variable	Plusvalía	Valor	Precio de Coste	Precio (Marx)	Cuota de ganancia (Marx)
	80	50	20	20	90	70	92	31%
	70	51	30	30	111	81	103	27%
	60	51	40	40	131	91	113	24%
	85	40	15	15	70	55	77	40%
	95	10	5	5	20	15	37	147%
Totales	390	202	110	110	422	312	422	35%
Media	78	40,4	22	22	84,4	62,4		

La columna correspondiente a lo que llama Marx “valor” es la suma de las columnas correspondientes al “Desgaste del Capital”, del “Capital variable” y de la “Plusvalía”; en cambio el “Precio de Coste” sería sólo las sumas del “Desgaste del Capital” más el “Capital Variable”. La Plusvalía total es 110 en el ejemplo y, por tanto, la plusvalía media sería 22. Pues bien, Marx calcula el *Precio de producción* (“Precio de Marx”) sumando al *precio de coste* esta plusvalía media en todos los sectores. ¿Habría con ello igualado las tasas de ganancia de las distintas mercancías? Este es un requisito para la solución correcta, dado que se supone que la competencia de los capitales va a llevar a esta igualación (al igual que en la economía marginalista). Pues ocurre que, si restamos los precios finales (“Precios de Marx”) de la suma de los correspondientes al “Desgaste del Capital” y al “Capital Variable” y dividimos el resultado por la suma de los dos anteriores, obtenemos la última columna, es decir, la columna correspondiente a las “cuotas de ganancia” que, como puede observarse, ¡no son iguales para ninguna mercancía! Es el propio Marx el que considera que ha dado con la solución correcta creyendo que la tasa de ganancia ¡para todas las mercancías es del 22%! Y se trata de un error aritmético, porque Marx señala el criterio correcto (según su manera de entender) diciendo que “el precio de producción de la mercancía (en el cuadro, “Precio de

Marx”) equivale, por tanto, a su precio de coste más la ganancia general, o lo que es lo mismo, equivale a su precio de costo más la ganancia media”⁵⁴. Es decir, Marx no calcula, de acuerdo con su criterio, correctamente los precios, porque estos precios no llevan a la igualación de las tasas de ganancia. Y aquí ya no estamos en un error aritmético sino conceptual.

Vamos a dar la solución correcta, pero para ello daremos un rodeo y entrar en el núcleo del presente artículo. Una solución correcta debiera cumplir el requisito –que considera Marx en otra parte de su obra- de que el valor total de las mercancías fueran iguales en términos de valor-trabajo y en términos de precio. El otro criterio - que también señala en otras partes de su obra- es el de las sumas totales de ganancia y plusvalía. En el presente artículo no hacemos uso de este último criterio aunque se deduzca en algún momento de las hipótesis previas. Vamos a solucionar un problema previo elemental y es el de que Marx compara los valores con los precios, cuando debiera comparar los *valores unitarios* con los precios, porque estos son también unitarios (es decir, son valores y precios por unidad de mercancía). Por ello vamos a presentar la ecuación vectorial de valor de las *n* mercancías de Marx de la manera siguiente:

$$(1) \quad HY = C + V + S$$

donde *H* es un vector $1 \times n$ de valores de trabajo por unidad de mercancía *i*, *Y* es una matriz (diagonal o no) $n \times n$ mercancías procedente de *j* sectores (o procesos para acercarnos a Sraffa), *C* es un vector $1 \times n$ del capital constante de cada mercancía *i*, *V* otro vector de los $1 \times n$ capitales variables y, por último, *S* el vector de plusvalías $1 \times n$ también. Siguiendo a Marx tenemos que calcular *la tasa de plusvalía global* como cociente de la suma de las plusvalías de todas las mercancías *i* (procedentes de los *j* sectores) entre la suma de los capitales constantes y variables. Dicho de otra forma, la tasa de plusvalía global vendría dada por:

$$(2) \quad \text{tasa plusvalía global} = \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i}$$

⁵⁴ Pág. 164 de *El Capital*, libro III, FCE, 1974.

Esta plusvalía se reparte proporcionalmente a los capitales implicados, es decir, al “precio de coste” (“Desgaste del Capital” más “Capital Variable” del ejemplo). Por ello, la primera transformación de *valores* (unitarios) a *valores transformados* (aún no a precios) vendría dado por:

$$(3) \quad J_i \sum_{j=1}^n y_{ij} = C_i + V_i + \frac{\sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i} \times (C_i + V_i)$$

siendo J_i el valor transformado que buscábamos. Si en (3) sacamos factor común queda:

$$(4) \quad J_i \sum_{j=1}^n y_{ij} = (C_i + V_i) \times \frac{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i}$$

Vamos a llamar M a:

$$(5) \quad M = \frac{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i + \sum_{i=1}^n S_i}{\sum_{i=1}^n C_i + \sum_{i=1}^n V_i}$$

o bien:

$$(5 \text{ bis}) \quad M = \frac{[C + V + S]I}{[C + V]I}$$

con I como vector vertical de unos. Y (4) en términos matriciales queda:

$$(6) \quad JY = M[C + V]$$

Puede comprobarse que si sumamos todos los valores de todas las mercancías de HY (multiplicando este vector por el vector I vertical de unos, es decir, calculando HYI) es igual a JHI , con lo cual ahora ¡también se cumple el criterio de Marx de la igualdad de la suma total

de valores antes y después de la transformación!⁵⁵ Si ahora calculamos los valores transformados a partir de los datos que aporta Marx obtenemos:

	Capital Constante	Desgaste del Capital	Capital Variable	Plusvalía	Valor	Precio de Coste	Valores transformados	Cuota de ganancia
	80	50	20	20	90	70	94,7	35%
	70	51	30	30	111	81	109,6	35%
	60	51	40	40	131	91	123,1	35%
	85	40	15	15	70	55	74,4	35%
	95	10	5	5	20	15	20,3	35%
Totales	390	202	110	110	422	312	422	35%
Media	78	40,4	22	22	84,4	62,4		

donde el valor transformado se ha calculado de acuerdo con (4), y donde ¡la tasa de ganancia –ahora sí– es igual para todos los sectores! De (6) se obtiene la primera solución correcta de la transformación de *valores* (unitarios) a *valores unitarios transformados* (J):

$$(7) \quad J = M[C + V]Y^{-1}$$

Aún no podemos hablar de precios (como hace Marx) porque el vector $1 \times n$ de *valores transformados* J viene medido en términos de valor-trabajo marxiano. Para pasar a precios vamos a introducir la ecuación:

$$(8) \quad \frac{1}{w} \times [p_{M1}, \dots, p_{Mn}] = [j_1, \dots, j_n]$$

siendo w la tasa de salarios y que permite eliminar de los *valores unitarios transformados* j_i su dimensión *valor-trabajo* (horas de trabajo). Entre (7) y (8) sale la ecuación vectorial:

$$(9) \quad P_M = wM[C + V]Y^{-1}$$

donde P_M ya son los precios de Marx, es decir, los precios de producción de Marx, pero correctamente calculados. Llegado a este punto bien podría acabarse el presente trabajo porque el objetivo del cálculo correcto de *los precios de producción* de Marx ya ha sido

⁵⁵ También se cumple esta igualdad con el criterio de Marx, pero lo que no se cumple es la igualdad de las tasas de ganancia. Quizá esto es lo que le llevó a Marx a cometer el error comentado a lo largo del artículo.

efectuado. Es verdad que la solución (9), aunque correcta formalmente y corregida del error del libro III de Marx, presenta el inmenso problema de que aún persisten los valores-trabajo de los medios de producción (el capital constante C) y el del capital variable (V). La valoración de los medios de producción en términos de valor-trabajo no es aceptable porque los empresarios compran (venden) estos medios de producción a sus *precios* (de mercado, tampoco de producción, pero este problema que es el de *la gravitación*, no lo tratamos) y no a supuestos valores en término de trabajo, aun cuando ya se hallan transformados correctamente. Por ello es necesario avanzar más, aunque esa dirección suponga hacer algunos supuestos restrictivos. Son los supuestos que hace Marx a lo largo de *El Capital* y en el resto de su obra. Marx supone que *las tasas de explotación* para las distintas mercaderías son iguales (cosa que ocurre en el ejemplo numérico traído a colación) y que *las composiciones orgánicas de capital* también son iguales. Desde el punto de vista económico –y aquí sí entramos en una discusión económica- el criterio último de la igualdad de estas composiciones orgánicas resulta inadmisibile, pero aceptamos el criterio de Marx. Ambos criterios se pueden formalizar con las ecuaciones vectoriales:

$$(10) \quad S = eV$$

$$(11) \quad V = k^{-1}C$$

donde e es la tasa de explotación igual para todas las mercancías y k^{-1} la composición orgánica de capital, también igual para todas las mercancías. Si ahora sustituimos (10) y (11) en (6) queda:

$$(12) \quad M = \frac{1+e+k^{-1}}{1+k^{-1}} = \frac{1+e(1+k)}{1+k}$$

Un hecho importante en (12) -por lo que ahora viene- es que mientras la tasa de explotación e sea positiva, M es mayor que 1 , lo cual hace que su inversa sea menor que 1 . Si además sustituimos también las ecuaciones (10) y (11) en (7) sale:

$$(13) \quad P_M = w(1+e+k^{-1})CY^{-1}$$

lo cual hace que (13) sea la tercera solución correcta obtenida con los criterios de Marx, con el añadido de la ecuación (8), que no está en Marx, pero que permite pasar sin pérdida de generalidad de *los valores unitarios* (ya transformados) a *los precios de producción*. Sin embargo aún estamos insatisfechos por la permanencia en (13) del capital constante (en el ejemplo, *desgaste del capital*) que viene medido en términos de horas de trabajo, a diferencia del resto de las variables que vienen medidas bien en valores monetarios (salario y precios) o bien en términos físicos (la inversa de las mercancías finales Y o *productos finales* en terminología *esrafiana*). Por ello vamos a introducir una ecuación que nos va a permitir eliminar este *desgaste de capital* por su equivalente *esrafiano* de *medios de producción X*.

$$(14) \quad wC = P_M X$$

No se trata de una ecuación baladí porque, al utilizar los mismos precios P_M para valorar los medios de producción X que los de los productos finales Y (mercancías en Marx), se hace el supuesto de que ya estamos en una situación de equilibrio. Este supuesto es ajeno a Marx, porque nada más lejos del economista alemán que buscar una situación de equilibrio, pero es imprescindible para obtener unos precios que puedan compararse con los precios obtenidos a su vez del modelo *esrafiano*. Si sustituimos (14) en (13) sale algo que resulta familiar en Sraffa:

$$(15) \quad \frac{1}{1+(1+e)k^{-1}} \times P_M = P_M A$$

siendo $A=XY^{-1}$. Si Y es diagonal y (con ello) A positiva -además de irreducible-, en (15) es aplicable el teorema de Perrón-Frobenius (el escalar que multiplica a P_M es menor que 1). Pero si aplicamos el teorema a (15), el autovalor que asegure ese vector P_M de precios positivo es único. Llamemos $a_{PF}(A)$ a dicho autovalor. Para ello ha de cumplir la igualdad:

$$(16) \quad a_{PF}(A) = \frac{1}{1+(1+e)k^{-1}}$$

Y la ecuación (16) resulta nefasta para la solución del problema de la transformación –incluso la correcta obtenida a partir del criterio de Marx– porque nos dice que sólo por casualidad existirá una estructura económica capaz de ser compatible con un conjunto de precios positivos. Esa estructura sería aquella tal que los capitales contante, variable y plusvalía estuvieran en relación entre sí de tal forma que cumplieran (16). Es verdad que estamos en el caso particular de una situación de equilibrio –recordar la ecuación de equilibrio (14)–, pero tampoco asegura ese vector de precios positivo una situación de desequilibrio. No supone esto dar la razón a los Böhm-Bawerk (señalando la incoherencia de la teoría del valor de Marx) o de Von Mises (señalando la imposibilidad de una planificación socialista). Significa sólo que son incompatibles dos de las leyes que estableció Marx: la de la igualdad de las tasas de plusvalía, la de la igualdad de las composiciones orgánicas de capital, y una tercera condición (que obviamente no podía estar en Marx) que es una solución de precios de equilibrio y positivos surgida por la posibilidad de aplicar Perrón-Frobenius. Yo creo inaceptable la segunda y tengo dudas de si la primera –la de plusvalía– es una ley económica o una mera definición, más allá de las intenciones de Marx, porque con meras intenciones –incluso loables– no se construye la ciencia. En cualquier caso este es otro problema, pero con (16) y con las condiciones –ecuaciones– señaladas, queda claro lo que es admisible en principio en Marx y lo que no lo es. A resultados análogos se llega con cadenas de Markov.

Partimos ahora de la ecuación de definición del sistema económico de Sraffa con salarios *pos-factum* tal como:

$$(17) \quad P_S Y = wL + (1 + g)P_S X$$

Sraffa hace ahora cero la tasa de salarios w , convirtiéndose la tasa de ganancia r en tasa máxima g_m . Pero además, si Y es diagonal, es decir, si estamos en la producción simple, esta tasa máxima es la razón-patrón R que mide el excedente relativo de todas las mercancías que corresponde a la mercancía-patrón. Por ello la ecuación (17) se convierte en:

$$(18) \quad P_S Y = (1 + R)P_S X$$

Tenemos en (15) los precios de producción de Marx (P_M) y en (18) los precios de Sraffa (P_S). Si ahora hacemos que ambos precios sean iguales, es decir, si:

$$(19) \quad \boxed{\text{si } P_M = P_S \Leftrightarrow (1 + e) = Rk}$$

Es decir, la condición necesaria y suficiente para que los precios de Marx y Sraffa sean iguales es que se cumpla (19). Con lo cual obtenemos una conclusión que no podíamos prever al comienzo del artículo: que la solución buscada por Marx (incluso la subsanada del error de Marx) de la transformación de valores a precios es precisamente la de los precios obtenidos por Sraffa con la mercancía-patrón en su modelo de producción simple y de precios de equilibrio⁵⁶. No significa ello que el análisis de Marx sea baldío como pretendía el economista Böhm-Bawerk⁵⁷, creyendo que una mala solución de Marx en el problema de la transformación de valores a precios arruinaba todo su sistema. Lo que se aporta en el presente artículo son las condiciones que han de cumplirse en el sistema de Marx y de Sraffa para llegar a (19). Han de cumplirse las ¿leyes? de Marx sobre las tasas de explotación (10) y de la composición orgánica de capital (11), la que relaciona valores transformados con precios a través de la tasa de salarios (8) y la de los precios de equilibrio entre productos finales y medios (14); de Sraffa, la de la transformación de su sistema de producción simple en un sistema de mercancía-patrón (18). De (19) podemos concluir que, en lo que a precios se refiere, donde acaba Marx comienza Sraffa, aun cuando sus intenciones y sus mundos conceptuales sean distintos.

De no aceptar que los precios P_M en (14) sean los mismos que en (13) porque no se tenga la intención de encontrar esos precios de equilibrio como solución al problema de la transformación, se puede considerar que los precios en (13) son de una fecha posterior a los precios en (14) y el resultado es:

⁵⁶ A esta misma formulación llega Steedman en *Marx after Sraffa (Marx, Sraffa y el problema de la transformación)*, FCE, pág. 122), aunque por distinto camino.

⁵⁷ *K. Marx and the Close of his System*, 1949. Para ser justos, también considera ese autor errónea o sin sentido la teoría del valor-trabajo de Marx sin tener en cuenta que esta teoría pueda ser considerada como una mera *contabilización* del valor de las cosas (mercaderías), lo cual no anularía la teoría de la explotación (o teoría de la plusvalía) del economista germano. Al menos por este problema.

$$(20) \quad P_{M(t+1)} = (1 + (1 + e)k^{-1})P_{M(t)}A$$

que es la quinta solución al problema, esta vez sin equilibrio, pero que podrían llevar al mismo según fueran los valores de e , k y A .

IV - REPRODUCCIÓN SIMPLE DE MARX A LA LUZ DE SRAFFA

En el tomo II de *El Capital*⁵⁸ plantea Marx la reproducción simple en términos, claro está, de valor-trabajo. El mismo Marx nos dice líneas más atrás que “*la reproducción simple a la misma escala constituye una abstracción, puesto que, de una parte, la ausencia de toda acumulación o reproducción en escala ampliada es, sobre una base capitalista, un supuesto absurdo y, de otra parte, las condiciones en que se reproduce no permanecen absolutamente iguales en distintos años*”. Y lo dice porque una cosa es, para el economista y revolucionario alemán, la reproducción en términos de valor y otra la reproducción en términos de unidades físicas de productos: aquélla puede permanecer en equilibrio entre dos sectores y sin embargo corresponder a cantidades y calidades de productos distintos, porque lo primero depende del valor incorporado socialmente a los productos y el trabajo acumulado en los medios, y lo segundo puede variar con los cambios tecnológicos, de organización, etc. No se trata sólo del lenguaje *hegelés* de Marx del que nos habla la gran economista Joan Robinson, sino de una forma de aproximación al conocimiento de las cosas a partir de diferentes grados de abstracción: el mundo de los valores-trabajo se mueve en un plano diferente de el mundo de los precios y de las cantidades físicas, al igual que el mundo de las ideas y de las realidades platónicas⁵⁹. No por ello hay que pensar que el mundo de los valores-trabajo está por encima del de las cantidades físicas y precios, porque el propio Marx habla de “*ascender de lo abstracto a lo concreto*”⁶⁰, que parece casi una provocación metodológica. Mi opinión personal es que este doble lenguaje y esta doble construcción de conceptos ha sido más una tara que un acicate para que el marxismo económico pase a los estudios económicos universitarios y, en general, a integrarse en el mundo del pensamiento occidental, y esto lo afirmo bajo la conciencia de ser tachado de ingenuo, porque quizá pesen

⁵⁸ El Capital, II tomo, pág. 352 y siguientes.

⁵⁹ “Plusvalía y cuota de plusvalía son, en términos relativos, lo invisible y lo esencial que se trata de investigar, mientras que la cuota de ganancia y, por tanto, la forma de la plusvalía como forma de ganancia se manifiestan en la superficie de los fenómenos”, El Capital, tomo III, pág. 58, FCE. Quizá aquí se muestre más kantiano que platónico.

⁶⁰ “Mientras que el método que consiste en elevarse de lo abstracto a lo concreto es, para el pensamiento, la manera de apropiarse lo concreto, o sea, la manera de reproducirlo bajo la forma de lo concreto pensado”, Fundamentos de la Crítica de la Economía Política”, pág. 42, edit Grijalbo.

mucho más los factores ideológicos para esta postergación. Iré ahora al grano.

A pesar de la prevención inicial de Marx sobre la reproducción simple, plantea en el II tomo⁶¹ de *El Capital* el caso de la reproducción simple de dos sectores que producen medios de producción y medios de consumos desagregados sus valores de la siguiente forma:

$$(1) \quad 4.000 K_1 + 1.000 V_1 + 1.000 S_1 = 6.000 \text{ VF (medios)}$$

$$(2) \quad 2.000 K_2 + 500 V_2 + 500 S_2 = 3.000 \text{ VF (consumo)}$$

Para Marx el equilibrio se encuentra si el capital variable del primer sector ($1.000V_1$) más su plusvalía ($1.000S_1$) se intercambia por el capital constante del segundo sector ($2.000K_2$), lo cual resulta todo muy lógico porque es el resultado que obtendríamos si igualáramos la segunda ecuación -la de los consumos (oferta)- con la sumas de los capitales variables y constantes del ambos sectores (demanda) y elimináramos términos comunes. *Ello supone que las rentas de los trabajadores y las plusvalías de los poseedores de los medios de producción se destinan íntegramente al segundo sector, es decir, al consumo.* Estaríamos ante una economía estacionaria en términos de valor, aunque, como señala Marx, no en términos de reproducción de los mismos bienes físicos ni, tampoco, a los mismos precios⁶². Por mi parte renuncio, en este trabajo al menos, al mundo, al nivel de abstracción de los valores-trabajo y me quedo con el de los precios y cantidades físicas, pero para no quedar varado en un terreno sin sistema me voy al mundo de Sraffa y su concepción de las mercancías como medio de consumo unas veces y como medios de producción en otras. Las dos ecuaciones análogas a las anteriores en la concepción de Sraffa serían como sigue:

$$(3) \quad \underset{1 \times m \quad m \times m}{P_1 Y_1} = \left[\underset{1 \times m \quad m \times m}{L_1 W_1} + \underset{1 \times m \quad m \times m}{P_1 X_1} \right] \times \underset{m \times m \quad m \times m}{(I_d + G_1)} \quad \text{de medios}$$

$$(4) \quad \underset{1 \times n \quad n \times n}{P_2 Y_2} = \left[\underset{1 \times n \quad n \times n}{L_2 W_2} + \underset{1 \times n \quad n \times n}{P_2 X_2} \right] \times \underset{n \times n \quad n \times n}{(I_d + G_2)} \quad \text{de consumo}$$

⁶¹ Pág. 354 del tomo II de la edición en el FCE.

⁶² Esto es ya más discutible.

donde L_1 y L_2 son los vectores $1 \times m$ y $1 \times n$ de inputs de trabajo; G_1 y G_2 son las matrices diagonales $m \times m$ y $n \times n$ de tasas de ganancia⁶³ donde $g_{ij}=0$ si $i \neq j$; P_1 y P_2 son los vectores de precios $1 \times m$ y $1 \times n$; X_1 y X_2 son las matrices $m \times m$ y $n \times n$ de medios de producción; I el vector de unos $n \times 1$, e I_d la matriz diagonal de unos. Para completar todo esto, de la ecuaciones (3) y (4) diríamos que Y_1 e Y_2 serían las matrices *sraffianas* de producción conjunta de dimensiones $m \times m$ y $n \times n$. Aquí procederemos de igual manera que hace Marx e igualamos el valor en términos de precios de los bienes (mercancías) del sector de bienes de consumo ($P_2 Y_2$) con los ingresos salariales y las ganancias de ambos sectores de tal forma que (5):

$$[L_2 W_2 + P_2 X_2] \times (I_d + G_2) I = L_1 W_1 I + [L_1 W_1 + P_1 X_1] G_1 I + L_2 W_2 I + [L_2 W_2 + P_2 X_2] G_2 I$$

nos da la ecuación de equilibrio:

$$(6) \quad L_1 W_1 (I + G_1) I + P_1 X_1 G_1 I = P_2 X_2 I$$

$$(6b) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{1i} w_{1ij} (1 + g_{1ij}) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{1i} x_{1ij} g_{1ij} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m p_{2i} x_{2ij}$$

Puesta la (6) de otra forma queda:

$$(7) \quad L_1 W_1 I + [L_1 W_1 + P_1 X_1] \times G_1 I = P_2 X_2 I$$

donde se puede resumir que *un (posible, pero no único) modelo de equilibrio marxiano de dos sectores (o de múltiples sectores agrupados en dos) a partir de las ecuaciones de Sraffa que definen el sistema económico, es aquel en el que las rentas salariales del sector (sectores) de medios de producción más las ganancias del mismo sector (sectores), se igualan al valor de reposición de los medios de producción del sector (sectores) de bienes de consumo. Es el mismo equilibrio que el de Marx en términos de valor-trabajo, solo que aquí,*

⁶³ Si estuviéramos en la producción simple de Sraffa con una sola tasa de ganancia y una sola tasa de salarios podríamos hablar de la razón-patrón de Sraffa. Sin estas condiciones -que las creo muy restrictivas- tenemos que contentarnos con las G_M , es decir, las tasas máximas de ganancia. Estas no garantizan que todos los precios sean positivos.

como veremos, tenemos la inmensa suerte -gracias a Sraffa- de que podemos eliminar los precios y mantener el equilibrio de la reproducción simple. Un comentario: si un gobierno -mejor un gobierno mundial- estuviera dotado de instrumentos políticos y económicos capaces de mantener este equilibrio -también a nivel mundial-, no habría crisis ni ciclos económicos o, al menos, estos serían mucho más benignos. Obsérvese que (7) está tan cerca de la realidad que casi podemos sustituir los datos en la ecuación y obtener resultados. Esa es la razón por la que hemos partido de n tasas de salario y n tasas de ganancia.

De las ecuaciones (3) y (4) se pueden obtener los precios y dejarlos explícitos:

$$(8) \quad P_1 = L_1 W_1 (1 + G_1) \times [Y_1 - X_1 (I + G_1)]^{-1} \quad (\text{medios})$$

$$(9) \quad P_2 = L_2 W_2 (1 + G_2) \times [Y_2 - X_2 (I + G_2)]^{-1} \quad (\text{consumo})$$

¡Y ahora viene la gran oportunidad gracias a Sraffa de eliminar los precios! Sólo tenemos que sustituir las ecuaciones de precios explícitos del sistema (8) y (9) en la ecuación última (7) de equilibrio y obtenemos (10):

$$L_1 W_1 (1 + G_1) \times [I + [Y_1 - X_1 (I + G_1)]^{-1}] X_1 G_1 I = L_2 W_2 (1 + G_2) \times [Y_2 - X_2 (1 + G_2)]^{-1} X_2 I$$

Aunque Marx no lo reconozca en ningún momento, su marcha al mundo de los valores-trabajo -además de otras razones- fue una forma de soslayar el problema ricardiano de cómo encontrar una medida de la distribución entre las diferentes rentas independiente de las posibles variaciones de los precios. Sraffa lo encontró a través de la mercancía-patrón y de la razón-patrón. Quizá por eso podemos abordar los problemas de Marx en *El Capital*, pero con el instrumental conceptual de Sraffa, aunque tampoco el economista italiano hiciera explícita esa intención.

Cálculo de la tasa máxima de ganancia.

Hay otra manera de hacer desaparecer en (5) los precios. De las ecuaciones (3) y (4) que definen el sistema se obtiene (11) cuando los salarios W se hacen cero y, por lo tanto, se convierten en máximas las tasas de ganancia G_{1M} y G_{2M} :

$$(11) \quad P_1 Y_1 = P_1 X_1 (1 + G_{1M}) \quad \text{de medios}$$

$$(12) \quad P_2 Y_2 = P_2 X_2 (1 + G_{2M}) \quad \text{de consumo}$$

Ello se consigue uniendo las ecuaciones (3) y (4) que definen el sistema, eliminando términos comunes y queda:

$$(13) \quad P_1 = L_1 W_1 (1 + G_1) \times (G_{1M} - G_1)^{-1} X_1^{-1} \quad \text{de medios}$$

$$(14) \quad P_2 = L_2 W_2 (1 + G_2) \times (G_{2M} - G_2)^{-1} X_2^{-1} \quad \text{de consumo}$$

Si ahora se sustituyen (13) y (14) en (11) y (12) queda:

$$(15) \quad [L_1 W_1 (1 + G_1) \times (G_{1M} - G_1)^{-1}] X_1^{-1} Y_1 = [L_1 W_1 (1 + G_1) \times (G_{1M} - G_1)^{-1}] \times (1 + G_{1M})$$

$$(16) \quad [L_2 W_2 (1 + G_2) \times (G_{2M} - G_2)^{-1}] X_2^{-1} Y_2 = [L_2 W_2 (1 + G_2) \times (G_{2M} - G_2)^{-1}] \times (1 + G_{2M})$$

Y observando las ecuaciones (15) y (16) podemos conjeturar una forma de calcular las $m+n$ tasas de ganancia máximas, aunque no se desprendan directamente de ambas ecuaciones:

$$(17) \quad \begin{matrix} X_1^{-1} & Y_1 & I \\ mxm & mxm & mx1 \end{matrix} = \begin{matrix} (I_d + G_{1M}) & I \\ mxm & mxm & mx1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} G_{1M} & I \\ mxm & mx1 \end{matrix} = \begin{matrix} I_d & I \\ mxm & mx1 \end{matrix} + \begin{matrix} X_1^{-1} & Y_1 & I \\ mxm & mxm & mx1 \end{matrix}$$

$$(18) \quad \begin{matrix} X_2^{-1} & Y_2 & I \\ nxn & nxn & nx1 \end{matrix} = \begin{matrix} (I_d + G_{2M}) & I \\ nxn & nxn & nx1 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} G_{2M} & I \\ nxn & nx1 \end{matrix} = \begin{matrix} I_d & I \\ nxn & nx1 \end{matrix} + \begin{matrix} X_2^{-1} & Y_2 & I \\ nxn & nxn & nx1 \end{matrix}$$

De (17) y (18) sale que para que G_M sea mayor o igual que cero es condición necesaria (aunque no suficiente)⁶⁴ que:

⁶⁴ Puede haber muchas tasas máximas de ganancia negativas del conjunto de $n \times n$ tasas G_M , pero la suma de ellas $|G_M|$ ha de ser positiva.

$$(19) \quad G_M I \geq 0 \Rightarrow [Y - X] I \geq 0$$

En realidad, podemos obtener n tasas de ganancia por los diversos tipos de mercancías o por los diferentes sectores, según que pos o pre multipliquemos G_M por el vector de unos $1 \times n$ o por el vector de unos $n \times 1$. Incluso una única tasa de ganancia máxima con $I G_M I$. Damos un ejemplo en el apéndice III.

V - TEORÍA DE LA REPRODUCCIÓN Y ACUMULACIÓN DE MARX A PARTIR DE SRAFFA

Leyendo literalmente la obra de Sraffa *Producción de mercancías por medio de mercancías* no podría decirse que tiene el economista italiano una teoría explícita de la reproducción y, menos aún, de la acumulación, como tiene, por ejemplo, Marx. Sin embargo su modelo lo es de equilibrio general y tiene por ello una teoría explícita de, al menos, reproducción simple. Lo tiene por los siguientes motivos: a) en la ecuación que define su sistema -que luego veremos- no están fechadas ni sus variables ni sus supuestas constantes; b) la razón-patrón R interrelaciona los medios de producción con los productos finales en términos físicos y esto exige dos momentos diferentes del tiempo; c) la mercancía-patrón se calcula a partir de unos multiplicadores que, al igual que la razón-patrón, interrelaciona medios y productos que no pueden ser simultáneos; d) la matriz de requerimientos $A=XY^1$ que relaciona también medios y productos se supone constante a lo largo del tiempo, incluso cuando llega Sraffa a la reducción del capital a trabajo fechado; e) la propia aplicación del teorema Perron-Froebenius exige una matriz de requerimientos A varada en el tiempo para obtener un vector de precios no negativos. Se podría añadir algún argumento más, pero quizá sería redundante. Además, cuando Sraffa nos señala el tipo de economía (modelo) objeto de análisis nos dice en el prefacio que: “*La investigación se ocupa exclusivamente de aquellas propiedades de un sistema económico que no dependen de variaciones en la escala de producción o en las proporciones de los factores*”⁶⁵. Es verdad que la diana a la que apunta es el marginalismo, pero con ello está suponiendo -quizá sin querer- o rendimientos constantes a lo largo del tiempo o reproducción simple o ambas cosas. De hecho, en la ecuación que define el sistema en la reproducción simple se pueden despejar los precios (únicos) en función del resto de las variables. No hay originalidad en todo esto, pero sí creo que la hay si se logra demostrar que los modelos que Sraffa va exponiendo, pasando por la producción sin excedente, con excedente, la reducción a trabajo fechado, la producción conjunta, la diferenciación entre bienes básicos y no básicos, y la producción con capital fijo, no sale en cualquier caso *de la reproducción simple*. Se puede presentar ese recorrido por sus esquemas como un caso particular de un modelo de reproducción y

⁶⁵ Pág. 11 de *Producción de mercancías por medio de mercancías* (en adelante *PMPM*).

acumulación parecido pero distinto al de Marx, que es, por otro lado, al que más se parece, y ello a pesar de que uno trabaje con lo que llama precios de producción⁶⁶ (Sraffa) y el otro con valores-trabajo (Marx). No es este el momento, pero no me resisto a afirmar que el italiano no tiene justificación en llamarles precios de producción y en el alemán los valores-trabajo da lugar a una definición de teoría de la explotación en lugar de una ley económica. Sólo en el interesantísimo *apéndice B* se ve obligado Sraffa a hablar explícitamente de “*productos no-básicos que se auto-reproducen*”⁶⁷. No es que Sraffa se negara a admitir que su modelo implica la reproducción simple, sino que, dado que su interés se centraba en la distribución, dejó, digamos, cojo su esquema. Nada que objetar, porque hasta los genios deben pararse a descansar. Los simples mortales vamos a tratar modestamente de completar su esquema.

Reproducción simple. Vamos a entrar directamente en la reproducción simple haciendo explícitos el sistema de ecuaciones que pueden definirla. Por supuesto que éstas no han sido elegidas al azar sino tras algunos intentos de comprobar si la meta final no traicionaba el modelo *esrafiano* original. Son estas las ecuaciones:

$$(1) \quad P_{C,k+1} Y_{C,k+1} + P_{k+1} X_{k+1} = (1+g)[P_k X_k + wL_k]$$

$$(2) \quad P_{C,k+1} Y_{C,k+1} + P_{k+1} X_{k+1} = (1+g_M)P_k X_k$$

$$(3) \quad X_{k+1} I = X_k I \quad y \quad P_{k+1} = P_k = P$$

$$(3 \text{ bis}) \quad \sum_{j=1}^n x_{k+1,ij} = \sum_{j=1}^n x_{k,ij} \quad \text{para todo } i=1 \text{ a } n$$

$$(4) \quad P_{C,k+1} Y_{C,k+1} I = 1$$

$$(5) \quad L_k I = LI = 1$$

La ecuación (1) es la de *definición del sistema* y se ha diferenciado los bienes no-básicos $Y_{C,k+1}$ que aquí vamos a llamar *de consumo*, sea cual sea el consumidor y que son aquellos que se consumen en el período

⁶⁶ En mi opinión son sólo precios de intercambio porque Sraffa no tiene una teoría de costes ni una función de costes. Llamarlos precios de producción induce al error.

⁶⁷ Pág. 125 de *PMPM*.

considerado (por ejemplo, un año) y no son medios de producción; $Y_{C,k+1}$ es una matriz *no* cuadrada $m \times n$ y $P_{C,k+1}$ es su vector de precios $1 \times m$. X_{k+1} , por su parte, es la matriz de bienes básicos $n \times n$, pero que aquí los consideramos como medios de producción producidos. Ello supone quizá forzar las definiciones *sraffianas* de bienes básicos y no-básicos, pero no queda otro remedio⁶⁸. Creo, a pesar de todo, que no supone traición al menos a su espíritu. P es el vector de precios $1 \times n$, que es común a los medios de producción como a los productos finales que sirven para producir; este vector de precios permanece constante a lo largo del tiempo, por lo que hemos omitido la referencia temporal. Por último, X_k es la matriz de medios de producción $n \times n$. Se ha *pre-multiplicado* también en (1) la masa salarial wL_k por la tasa de ganancia g , a pesar de que Sraffa suele trabajar con lo que él llama salarios *post-factum*. Hoy día eso es inadmisibile y la razón de trabajar así -y que procede de Ricardo- está mal justificada por el italiano⁶⁹. No obstante, los resultados son esencialmente los mismos, solo que con un factor $(1+g)$ pegado a w . Que la matriz $Y_{C,k+1}$ sea *no* cuadrada se ha hecho en aras del realismo, porque que el número de mercancías (hoy bienes y servicios) destinadas al consumo (m en $Y_{C,k+1}$) sea igual al número de mercancías destinadas a la reproducción de los medios (n en X_{k+1} y X_k) es *un suceso* casi imposible. La ecuación (2) surge de hacer cero la tasa de salarios w . La (3) es la ecuación estratégica de este modelo. En ella se expresa la igualdad entre el total de los medios de producción X_k en *términos físicos* de un período y los productos finales de medios de producción X_{k+1} del período siguiente, también en términos físicos. Es decir, el sistema se reproduce así mismo sólo en los medios de producción, mercancía a mercancía, en el total de los sectores. Insisto que no se exige que cada sector produzca la misma cantidad de mercancías período a período, sino que la igualdad se de para *la suma* de todos los sectores (pero mercancía a mercancía). Si el modelo se ve muy rígido, vale con que se cumpla la ecuación en términos de *valor* $PX_{k+1}I = PX_kI$, donde I es el vector de unos $n \times 1$. No obstante, en mi opinión debe mantenerse la ecuación tal y como está en (3), es decir, como *suma en términos físicos de todos los sectores* por cada mercancía por dos motivos: a) porque creo que es más acorde con el

⁶⁸ Schefold ha hablado de abandonar la distinción de *bienes básicos y no-básicos* porque traen más complicaciones que dilucidan conceptos.

⁶⁹ Y no solo por Sraffa sino por todos los economistas posteriores. Se ha confundido *la forma* de cálculo (que es lo que hace Sraffa) con *cuando* se cobran los salarios (que es lo que cree Sraffa que hace).

espíritu *esrafiano* que se desprende de su obra; b) porque hacerlo en términos de valores, es decir, como $PX_{k+1}I = P_kXI$, se corre el peligro de llegar *sólo* a una igualdad total y tautológica entre *demanda agregada*⁷⁰ en términos de valor (derivada de las rentas salariales y las ganancias) y *oferta agregada* como suma, en términos de valor, de los bienes de consumo $Y_{C,k+1}$ más los bienes finales de producción X_{k+1} . Insisto que el peligro es acabar en una igualdad contable en lugar de un equilibrio derivado de leyes económicas.

El sistema es de *reproducción simple*⁷¹ porque lo que indica (1) y (3) es que con las rentas obtenidas por la venta de $X_{k+1}I$ se compran nuevamente medios de producción para el período siguiente, que son idénticas si $X_{k+1}I = X_{k+2}I$; alternatively pueden serlo en términos de valor y por el total, si hacemos que se cumpla $PX_{k+1}I = PX_kI$. Las ecuaciones (4) y (5) son los numerarios que se van a aplicar y que no se han elegido al azar precisamente. Hemos dejado para lo último la explicación sobre el período temporal que llevan el resto de las variables. En la ecuación que define el sistema (1) se ha diferenciado el período $k+1$ donde se obtienen los bienes de consumo $Y_{C,k+1}$ y de productos finales de medios X_{k+1} -así como sus respectivos precios- de los períodos de las variables L_k y X_k del lado derecho de la ecuación y que se supone que entraron en la producción en un período anterior k . No obstante, dado que estamos en la reproducción simple, las referencias temporales desaparecen porque se supone que tanto el trabajo como los medios de producción se repiten en diferentes períodos, así como los productos de consumo Y_C . Las tasas de salario w y de ganancia g permanecen constantes en el modelo. Queda claro pues, que la (3) es una ecuación de comportamiento que permite alternativas, es decir, que es una ley económica y no una mera definición. De la ecuaciones (1) y (2) sale la ecuación explícita de precios de medios y productos finales.

⁷⁰ Eso pasó con la demanda agregada de origen keynesiano, y el propio Keynes y epígonos se enfrascaron con conceptos como la demanda ex-ante y ex-post para evitar la tautología.

⁷¹ No hay que confundir que lo sea o no de *producción simple o conjunta*. En este caso podría valer para ambas, porque nada se ha dicho sobre la matriz Y de productos finales de medios de producción: si no fuera diagonal habría también en estos productos producción conjunta- aparte de los bienes de consumo P_C - y si Y fuera diagonal lo sería de producción simple para estos productos.

$$(6) \quad P = \frac{(1+g)w}{g_M - g} \times L X^{-1}$$

Una vez calculada la (6), del conjunto de $n+2$ ecuaciones que van de la (3) a la (5) más las n ecuaciones de (6) nos da, todo ello, la ecuación fundamental de este sistema:

$$(7) \quad w = \frac{g_M - g}{(1+g)g_M}$$

¡Si reemplazáramos g_M por la razón-patrón *esrafiana* R , sería la ecuación fundamental de Sraffa de esta razón en su versión *pre-factum* en el pago de salarios! Es por supuesto una analogía, puesto que R no saldría de este conjunto de ecuaciones ni aún cuando añadiéramos la ecuación $PX_{k+1}=(1+R)PX_k$, porque ello exigiría un numerario tal como $PX_{k+1}I-PX_kI=1$, cosa que *no* hemos hecho y que no podríamos hacer porque ya hemos tomado como numerario $P_{C,k+1}Y_{C,k+1}$ en (4), cosa que ha sido imprescindible para llegar a la ecuación (7). O lo uno o lo otro.

Frontera salario-ganancia. Cambiando de tema, esta ecuación es además la frontera de salarios-ganancias con puntos de corte en $w(g=0)=1$ y $g(w=0)=g_M$. La función (7) entre tasa de salario y de ganancia como variables es crecientemente decreciente, puesto que tiene la primera derivada negativa y la segunda positiva. La (7) implica otra ecuación que no hemos hecha explícita, que es como sigue:

$$(8) \quad P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I = wL_kI + g(wL_kI + P_kX_kI)$$

La (8) nos dice que las rentas totales⁷² del lado derecho de la ecuación, es decir, las derivadas del trabajo más las ganancias sobre las masa de salarios y medios de producción (*demanda*), han de comprar todos - pero sólo- los medios de consumo $P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I$ (*oferta*). Es la segunda ecuación de equilibrio del sistema, complementaria con la (3), pero en términos de valor, es decir, como $PX_{k+1}I=PX_kI$. Con ello completamos la reproducción simple. Podemos enunciarlo así: *un posible sistema de*

⁷² No se puede llegar sólo a una ecuación como $P_C Y_C = wL + g(wL + P X)$ a partir sólo del sistema de ecuaciones original.

equilibrio y reproducción simple esrafiiano es aquel en el que el conjunto de todos los bienes de consumo son comprados con el conjunto de las rentas del trabajo más las ganancias empresariales y que, complementariamente, el valor de los productos finales se destinan íntegramente a comprar los mismos productos como medios de producción.

Reproducción ampliada. Debemos avanzar porque lo dicho hasta ahora está implícito en la obra de Sraffa, aunque el no pudiera llegar a (7) ni a definir explícitamente (8). Ahora sí nos adentramos en terrenos no explorados por el genial italiano, porque vamos a suponer dos *tasas de acumulación* (o de reproducción ampliada) del sistema. Una -llamémosla ν - en la reproducción de los medios de producción X y otra -que será u - para la reproducción de los bienes de consumo Y_C . Ambos hechos quedan reflejados en las ecuaciones que siguen:

$$(9) \quad X_{k+1}I = (1 + \nu) \times X_k I \quad \text{con } \nu > 0$$

$$(9 \text{ bis}) \quad Y_{C,k+1}I = (1 + u) \times Y_{C,k}I \quad \text{con } u > 0$$

En (9) el sistema ya no simplemente se auto-reproduce, sino que deja el margen $\nu X_k I$ destinada a aumentar los productos finales de medios de producción $X_{k+1}I$ por ese misma cantidad física para todas los medios de producción del conjunto de los sectores. Además se aumentan los bienes de consumo final Y_{ck} un porcentaje igual a u . Alternativamente - y al igual que antes- podemos suponer que el sistema se acumula en términos de valor, aplicando ν a $PX_k I$ directamente para obtener $PX_{k+1}I = (1 + \nu)PX_k I$ y u a $P_{ck}X_{ck}I$ y nos da $P_{C,k+1}Y_{C,k+1}I = (1 + u)P_{C,k}Y_{C,k}I$. Como curiosidad podemos añadir que la diferencia entre u y ν es un índice de productividad *no laboral*⁷³ del sistema. Si ahora resolvemos el conjunto de ecuaciones originales, pero sustituyendo la (3) por la (9) y (9 bis), nos da la significativa ecuación:

$$(10) \quad w = \frac{(1 + u) \times (g_M - g)}{(1 + g) \times (g_M - \nu)}$$

⁷³ No laboral dado que no interviene explícitamente L .

donde vemos que (10) se diferencia de (7) en que el segundo multiplicando del denominador ya no es g_M sino $g_M - v$ y que en el numerador aparece un nuevo multiplicando: $(1+u)$. La tasa de ganancia se obtendría de (10):

$$(11) \quad g = \frac{g_M (1 + u - w) - vw}{1 + u + w(g_M - v)}$$

Despejando ahora *la tasa de acumulación* (o de reproducción) v :

$$(12) \quad v = \frac{g_M [(1 + g)w - 1 - u] + g(1 + u)}{(1 + g)w}$$

Y la tasa de crecimiento de los bienes de consumo:

$$u = \frac{(g_M - v)[(1 + g)w - 1]}{g_M - g}$$

Uno de los mantras de la teoría del crecimiento neoclásica es que, bajo ciertas condiciones, la tasa de crecimiento de una economía es proporcional (incluso igual) a la tasa general de ganancia del sistema. No entramos si la realidad se adecua a esta conclusión neoclásica porque la realidad -y más la actual- la ha dejado herida de muerte. En el modelo esrafiano no existe proporcionalidad. Calculamos la primera derivada de (12) y a pesar de su terrible aspecto, queda:

$$(13) \quad \frac{dv}{dg} = \frac{(1 + u) \times (g_M - g)}{(1 + g)^2 w} > 0 \quad \text{si } g_M > g$$

La segunda derivada es:

$$(14) \quad \frac{d^2v}{dg^2} = -\frac{(1 + u) \times (1 + g_M)}{(1 + g)^3 w} < 0$$

Es decir, la primera derivada positiva y la segunda negativa significa que la función (12) es decrecientemente creciente. Además, su

crecimiento se detiene tangencialmente con la recta: $v=(1+g_M)/w$ que es, por lo tanto, su tope máximo. Los puntos de corte son:

$$(15) \quad v(g=0) = \frac{g_M(w-1-u)}{w} \quad \text{con } v > 0 \quad \text{si } w < 1+u$$

$$(16) \quad g(v=0) = \frac{g_M(1+u-w)}{1+u+wg_M} \quad \text{con } g > 0 \quad \text{si } w < 1+u$$

En el caso que nos ocupa, la ecuación de reproducción del sistema equivalente a la (8) de la reproducción simple sería como sigue:

$$(17) \quad (1+u)P_{C,k}Y_{C,k}I = (g-v)P_kX_kI + (1+g)wL_kI$$

donde el lado derecho de la ecuación son las ganancias y salarios que van a demandar los bienes de consumo (lado izquierdo). Se puede observar en (17) que las ganancias derivadas de los medios de producción $(g-v)PX_kI$ son menores que en (8) -que eran gPX_kI - por la necesidad de dedicar parte de ellas (vPX_kI) en (9) a aumentar la demanda de productos finales de medios de producción X_{k+1} . Por ello, ahora las ganancias correspondiente a la masa salarial gwL_kI han de servir para compensar esa menor demanda.

Generalización I

Una generalización del sistema de *reproducción simple* de origen esrafiانو vendría dado por el sistema de ecuaciones:

$$(18) \quad P_{C,k}Y_{C,k+1} + P_kX_{k+1} = [P_kX_k + L_kW] \times (1+G)$$

$$(19) \quad P_{C,k}Y_{C,k+1} + P_kX_{k+1} = P_kX_k(1+G_M)$$

$$(20) \quad X_{k+1}I > X_kI$$

$$(9) \quad X_{k+1}I = (1+v) \times X_kI \quad \text{con } v > 0$$

$$(9bis) \quad Y_{C,k+1}I = (1+u) \times Y_{C,k}I \quad \text{con } v > 0$$

donde lo que cambia respecto al modelo anterior de reproducción ampliada es que ahora ya no tenemos tasas unitarias de salarios y ganancias, sino matrices diagonales de salarios W , de salarios, G y de ganancias máximas G_M . De las ecuaciones (19), (9) y (9bis) sale la ecuación de equilibrio del sistema:

$$(21) \quad P_{C,k} Y_{C,k} I = \frac{1}{1+u} \times L W (1+G) (G_M - G)^{-1} (G_M - v I_d) I$$

Es esta una ecuación que implica un doble equilibrio. Por un lado indica la necesidad de igualar la oferta de bienes de consumo (lado izquierdo de la ecuación) con las rentas salariales y gananciales que representa el lado derecho; por otro es un equilibrio temporal, porque si el sistema respecta (21), ello indicaría que la senda de crecimiento de los bienes de consumo (u) se equilibra con la demanda derivada de las rentas producidas en los dos sectores en los que hemos dividido la economía: el de medios de producción y el de bienes de consumo. Un gobierno que tuviera el poder político y económico capaz de obligar a mantener ese equilibrio en el conjunto de la economía podría dominar las crisis y evitar o, al menos, aplanar muchísimo los ciclos internos de la economía. Mejor aún si ese poder fuera un poder mundial. Pero eso es una utopía. Volviendo a la ecuación de equilibrio (21), de ella y de la de definición del sistema de este epígrafe, es decir, de la (18), junto el resto, obtenemos la complementaria de equilibrio y que es una alternativa a la (21):

$$(23) \quad (1+u) P_{Ck} Y_{Ck} I - P_k X_k (G_M - v I_d) I = L_k W (1+G) I$$

En esta no tenemos la matriz diagonal de ganancias máximas G_M y en la (21) está ausente la matriz de medios X_k . Juntas son redundantes. No es este el único modelo posible de reproducción simple o acumulada respetuoso con el espíritu *esrafiano*, pero es el más simple posible porque sólo hemos exigido que se reproduzca -o se amplíe- los productos finales X de un período que serán medios de producción en el período siguiente y que se haga lo propio con los bienes de consumo Y_C . Incluso la reproducción ampliado de los medios de producción no es necesaria. Es decir, la tasa de reproducción v podría ser cero. No se me ocurre otra manera más adecuada de equiparar en lo posible los bienes de consumo de la macroeconomía

convencional con el criterio de bienes *no-básicos* de Sraffa. Aunque se ha expresado el equilibrio en términos monetarios, el origen de los equilibrios en la reproducción del sistema se ha hecho a partir de la igualdad -o del crecimiento- *en términos físicos* de los productos finales de medios de producción de un período con el de medios de producción del siguiente. En este modelo de equilibrio de inspiración *esrafiana*, los precios juegan un papel pasivo y sólo intervienen como relaciones de intercambio, a diferencia de los precios de los modelos de *equilibrios competitivos* del análisis convencional, donde determinan *los excesos de demanda* que supuestamente vacían los mercados⁷⁴. Los precios, en el equilibrio *esrafiano*, no son una guía para el conocimiento sobre la escasez de bienes y servicios, sino que expresan relaciones de intercambio entre bienes y servicios (mercancías, *commodities*, en lenguaje *esrafiano*). En Sraffa puede haber equilibrio mediante el trueque, sin precios, porque las propias relaciones de trueque sustituyen y son equivalentes a los cocientes de precios. En el (o los) equilibrios *esrafianos* no hay funciones de producción ni funciones de demanda explícitas, porque medios y productos son datos surgidos del intercambio. No obstante, ello es compatible con las funciones anteriores siempre y cuando estas no determinen salarios y ganancias. La razón es la de que en cualquier modelo *esrafiano* de reproducción o de acumulación o, simplemente, de equilibrio, la relación entre salarios y ganancias se determinan exógenamente, sociológicamente, y no tecnológicamente o por efectos de supuestas productividades o utilidades. Sraffa, como heredero de Torrens, Ricardo, Smith, Mill, Marx, etc., es decir, de los clásicos, abre un mundo nuevo, alternativo al marginalismo y en parte al neoclasicismo, e incompatible con ellos. Eso sí, ese mundo hay que completarlo y, porqué no, también crearlo.

Generalización II

El modelo que venimos proponiendo permite una generalización aún mayor, porque ahora vamos a suponer que existen n tasas de acumulación en la producción de bienes de consumo u_{ij} tales que para $u_{ij}=0$ si $i <> j$ y con $u_{ij}>0$ si $i=j$, concretadas en la matriz diagonal U ; también n tasas también de acumulación v_{ij} en la producción de medios de producción tales que $v_{ij}=0$ si $i <> j$ y con $v_{ij}>0$ si $i=j$, concretadas a su

⁷⁴ *General competitive analysis*, Arrow y Hahn, 1971.

vez en la matriz diagonal V . Con ello las ecuaciones (9) y (9bis) del modelo anterior se convierten en:

$$(24) \quad Y_{C,k+1}I = Y_{C,k}(1+U)I \quad \text{con } u > 0 \quad \text{si } u_{ij} < 0$$

$$(25) \quad X_{k+1}I = X_k(1+V)I \quad \text{con } v_{ij} > 0 \quad \text{si } v_{ij} < 0$$

Ahora, sustituidas estas ecuaciones en la (19) del modelo anterior, nos da la ecuación de equilibrio tal como:

$$(26) \quad P_{Ck}Y_{Ck}(1+U)I - P_kX_k(G_M - V)I = L_kW(1+G)I$$

donde, como siempre, *la parte de la izquierda de la ecuación es la oferta de bienes de consumo en términos de valor menos el valor de medios de producción minorado de la tasa de crecimiento (acumulación) de estos bienes, ha de ser igual también en términos de valor a las rentas salariales aumentadas por las tasas de ganancia.* Al igual que hemos hecho antes, podemos hacer desaparecer los precios de los medios de producción con una ecuación análoga a la (21) y se obtiene:

$$(27) \quad P_{C,k}Y_{C,k}I = LW(1+G)(G_M - G)^{-1}(G_M - V)(1+U)^{-1}I$$

Esta ecuación de equilibrio desde el punto de vista formal es más sencilla puesto que sólo tenemos un sumando a cada lado de la ecuación. Su interpretación económica viene a ser que el equilibrio con crecimiento -tanto en el sector de bienes de consumo como de producción de medios- se da si la oferta en términos de valor global de bienes de consumo se iguala a las rentas laborales modificadas por todos los factores que aparecen como multiplicandos en el lado derecho de la ecuación. Hay dos cosas significativas en (27): a) que estamos muy cerca ya de lo empírico, por lo que una política económica deliberada tendente a impedir crisis y ciclos debiera guardar este equilibrio si el un gobierno tuviera el poder político y económico capaz de hacerlo observar. En una economía de *mero* mercado es imposible llegar a ese poder, pero hay que ser consciente de lo que se pierde con ello; b) que se puede observar que los precios de los medios de producción no aparecen explícitos en (27). Eso significa que una planificación de la

economía basada en (27) sólo tendría como dato -sea del mercado o planificado- los precios de los bienes de consumo. En términos aritméticos (27) sería):

$$(27\text{bis}) \quad \sum_{h=1}^m \sum_{j=1}^n p_{C,k,h} y_{C,k,hj} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{l_i w_{ij} (1 + g_{ij}) \times (g_{Mij} - v_{ij})}{(g_{Mij} - g_{ij}) \times (1 + u_{ij})}$$

Apéndice I: generalización a la producción conjunta no esrafiana

En el cuerpo principal de este trabajo hemos partido de el caso de la producción conjunta *esrafiana*, donde el tamaño de la matriz de productos finales Y es del mismo tamaño que la matriz de medios X . Esto se puede generalizar para el caso de que no coincidan las mercancías (bienes y servicios) del producto final con el número de mercancías que se utilizan como medio, aunque coincidan los sectores. Seguimos con dos sectores, pero para lo que sigue no es preciso duplicar las ecuaciones y sólo vamos a trabajar con una única ecuación. Partimos de la ecuación *esrafiana* que define el sistema:

$$(a1.1) \quad \begin{matrix} P_a \\ 1 \times m \end{matrix} Y = \begin{bmatrix} L & W + P & X \\ 1 \times n & n \times n & 1 \times n \quad n \times n \end{bmatrix} \times \begin{matrix} (I_d + G) \\ n \times n \quad n \times n \end{matrix}$$

donde el vector de precios de productos finales P_a tienen dimensiones $1 \times m$, mientras que el de precios de medios es $1 \times n$. La otra diferencia con respecto a la producción conjunta *esrafiana* es la de que el vector de productos finales Y consta de m mercancías y n sectores. Si hacemos ahora cero las tasas de salario W para calcular las tasas máximas de ganancia G_M queda como siempre:

$$(a1.2) \quad \begin{matrix} P_a \\ 1 \times m \end{matrix} Y = \begin{bmatrix} P & X \\ 1 \times n & n \times n \end{bmatrix} \times \begin{matrix} (I_d + G_M) \\ n \times n \quad n \times n \end{matrix}$$

Y si ahora igualamos las dos ecuaciones anteriores, eliminamos términos comunes y despejamos los precios de los medios P queda:

$$(a1.3) \quad P = LW(1+G) \times (G_M - G)^{-1} X^{-1}$$

que es la ecuación de los precios P de los medios de producción dependiente de las tasas máximas de ganancia G_M . Ahora sustituimos los precios de esta ecuación en la primera que define el sistema y nos da la ecuación de productos finales P_a sin dependencia de los precios de producción:

$$(a1.4) \quad P_a = LW \left[I + (1+G) \times (G_M - G)^{-1} \right] \times (1+G_M) Y^T \left[Y Y^T \right]^{-1}$$

La gran diferencia entre las ecuaciones (a1.3) y (a1.4) es la de que los precios de los productos finales P_a dependen, entre otras variables, de la producción de los productos finales Y , mientras que los precios de los medios de producción P son independientes directamente de estos productos finales. No obstante la dependencia indirecta se mantiene a través de las tasas máximas de ganancia G_M . La otra característica que es común a ambas ecuaciones es que si las tasas de ganancia G se acercaran a las tasas máximas de ganancia G_M , los precios aumentarían exponencialmente, como ya nos advierte Sraffa⁷⁵. Y eso ocurre con todos los precios, tanto de los medios P como de los productos P_a , y no sólo, como señala Sraffa en su apéndice B de su libro *Producción de mercancías por medio de mercancías*, para el caso de los productos no básicos que se auto-reproducen (el ejemplo que pone Sraffa en el apéndice son *las habas*).

En cuanto a las ecuaciones de equilibrio son las mismas que hemos visto para el caso de la producción conjunta *esrafiiana* porque este equilibrio no depende de los productos finales ni de sus precios.



⁷⁵ Apéndice B de *Producción de mercancías por medio de mercancías*.

Apéndice II: tasa de plusvalía, de ganancia y composición orgánica

Si definimos la tasa de plusvalía e como $e=P/V$, la composición orgánica de capital q como $q=C/V$ y la tasa de ganancia g como $g=P/(C+V)$ se obtiene la relación:

$$(a2.1) \quad g = \frac{e}{1 + q}$$

Y si despejamos la composición orgánica de capital q a los efectos aritméticos sale:

$$(a2.2) \quad q = \frac{e - g}{g}$$

Aquí se ve que si las tasas de explotación e y las tasas de ganancia g son únicas (iguales para todos los sectores), también lo son las composiciones orgánicas de capital q . Por ello no podemos establecer -suponiendo que se consiga- leyes de formación económicas *distintas* para cada una de las tres porque eso nos llevaría a una contradicción entre los 3 coeficientes. Una de ellas sobra y una manera de salvar la cuestión es que dos de ellas sean distintas según sectores. La otra opción es abandonar como ley de formación a una de las tres.



Apéndice III: reproducción simple y tasa máxima de ganancia

Hay otra manera de mostrar el equilibrio de la reproducción simple con las anteojeras de Sraffa. Supongamos que los medios de producción que se emplean en la ecuación (3) -para a su vez producir medios- son los mismos que se emplean para producir productos finales de consumo en la ecuación (4). Es una hipótesis con mucho sentido. Supongamos además que todas las matrices de productos y medios de los dos sectores (o conjunto de sectores) tienen la misma dimensión $n \times n$. Esto supone una cierta restricción que pierde generalidad. Ocurre entonces que la ecuación de equilibrio:

$$(6) \quad L_1 W_1 (I + G_1) I + P_1 X_1 G_1 I = P_2 X_2 I$$

queda como sigue:

$$(a.III.1) \quad L_1 W_1 (I + G_1) I + P_1 X_1 G_1 I = P_1 X_1 I$$

Lo que ha cambiado es que hemos hecho iguales los precios y cantidades de los medios de producción de ambos sectores, es decir, que: $P_2 X = P_1 X_1$, porque son los mismos medios. De la última ecuación obtenemos la ecuación de equilibrio general del sistema económico tal y como se ha definido:

$$(aIII.2) \quad L_1 W_1 (I + G_1) I = P_1 X_1 (I - G_1) I$$

que en términos aritméticos es:

$$(aIII.2 \text{ bis}) \quad \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n l_{1i} w_{1ij} (1 + g_{1ij}) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n p_{1i} x_{1ij} (1 - g_{1ij})$$

Al igual que decíamos en el cuerpo principal de este trabajo, un gobierno nacional o mundial que tuviera suficiente poder político y económico (no existe actualmente) que fuera capaz de implementar políticas económicas capaces de hacer observar el equilibrio de la ecuación anterior, tendría mucho avanzado para combatir los ciclos y las crisis. Ha de observarse también -y es significativo- que no hay que preocuparse por los salarios, tasas de ganancia y precios de los sectores

de bienes de consumo (que no aparecen en la ecuación), sino tan sólo por estas variables del sector de medios de producción. Intelectualmente no puede ser más sencillo. Eso sí, las dificultades ideológicas y de poder son inmensas. También vale esta ecuación de equilibrio -así como aquella de la que procede- para una economía abierta (con sector exterior), porque podemos asimilar las importaciones como una parte de los productos finales y las exportaciones como medios de producción para obtener precisamente las anteriores⁷⁶. ¡Y todo esto ha surgido de la simple conjunción de Marx y Sraffa! De la ecuación (aIV.2bis) se desprende que si aumentan las ganancias sin que se muevan las demás variables la ecuación se desequilibra, y para encontrar de nuevo la condición de equilibrio han de subir los precios del sector (el de medios), han de bajar los salarios o aumentar los despidos, o una combinación ponderada de las tres cosas a la vez. ¡Con esta ecuación tendrían los sindicalistas argumentos para que no suban las ganancias en períodos de equilibrio o de crecimiento moderado y sin situaciones de crisis⁷⁷!

⁷⁶ Cosa que se hace en las tablas Input-Output.

⁷⁷ Recuérdese que partimos de una situación de reproducción simple en términos físicos.

Apéndice IV: los problemas de la tasa de plusvalía

Ya hemos visto en la teoría marxista la imposibilidad de que se igualen para todos los sectores las tasas de ganancia y las tasas de plusvalía porque eso implica la igualdad de las composiciones orgánicas del capital de Marx, lo cual es inaceptable por motivos puramente empíricos. Pero es que además la tasa de plusvalía como cociente entre la plusvalía y el capital variable tiene problemas de inconsistencia interna, tanto si la consideramos sector a sector como si la consideramos globalmente. En la concepción de Marx la plusvalía surge como consecuencia de la diferenciación entre el *valor del trabajo* que le pone el trabajador (obrero o, por extensión, asalariado) al trabajo y que es por lo que le contrata el empresario, y *el valor de la fuerza de trabajo*, que es lo que le paga. Pero con la tasa de plusvalía marxiana surge 4 temas que Marx soslayó o no percibió como problemas, además del señalado anteriormente (de ese sí fue consciente): 1) el de la constancia de la tasa de plusvalía en todos los sectores; 2) uno propiamente ontológico y gnoseológico: ¿es la concepción de la tasa de plusvalía por Marx una ley económica o una definición?; 3) ¿depende de los salarios o la tasa es la misma sea cual sea a su vez la tasa de salarios?; 4) ¿depende esta tasa sólo de la duración de la jornada de trabajo? Resulta curioso que sean cuáles sean las respuestas, todas resultan problemáticas, aunque unas más que otras. En cuanto a la primera cuestión, Marx mantiene siempre esa constancia en los ejemplos en todos los sectores. Seamos generosos con Marx y supongamos la posibilidad de distintas tasas de plusvalía según sectores. No hay inconveniente porque, de lo contrario, la plusvalía (al menos la relativa) sería una definición, y como tal, no añadiría nada al conocimiento científico de raíz marciano porque sólo sería un concepto más. Lo que cabe menos duda es la adscripción de la plusvalía a la jornada de trabajo. Oigamos a Marx: “*La plusvalía producida mediante la prolongación de la jornada de trabajo es la que yo llamo plusvalía absoluta; por el contrario, a la que se logra reduciendo el tiempo de trabajo necesario, con el consiguiente cambio en la proporción de magnitudes entre ambas partes de la jornada la designa con el nombre de plusvalía relativa*”⁷⁸. Sin embargo, unas líneas antes da a entender Marx que también depende la “*capacidad productiva del trabajo*”. Dicho en lenguaje esrafiano, dependería de *Y*, *X* y *L*, es decir, de los productos finales, medios y del trabajo. De las 4 preguntas que hemos

⁷⁸ *El Capital*, tomo I, FCE, pág. 252.

hecho, la más delicada es la tercera. Ya hemos demostrado que la tasa de plusvalía depende del nivel de salarios. Vamos a verlo de otra forma. Supongamos que hemos resuelto el problema de la transformación de valores a precios correctamente (hay varias formas) y que tenemos la ecuación:

$$(aIV.1) \quad PY = tHY = a_i C + b_i V + c_i S$$

donde t , a_i , b_i , c_i son los $3 \times n + 1$ multiplicadores sectoriales, P el vector de precios $1 \times n$, H es el vector $1 \times n$ de trabajo unitario de cada mercancía i , Y la matriz diagonal de productos finales y C , V , S son los vectores $1 \times n$ de capitales contantes, variables y plusvalía por cada mercancía. Y ya que tenemos transformados valores a precios por cada mercancía vamos a hacer la asignación siguiente (discutible, pero lógica).

$$(aIV.2) \quad a_i C = PX$$

$$(aIV.3) \quad b_i V = LW$$

$$(aIV.4) \quad c_i S = R_{NL}$$

siendo X la matriz $n \times n$ de medios de producción, L el vector trabajo $1 \times n$ y R_{NL} las rentas *no* laborales (no derivadas del trabajo asalariado). La tasa de plusvalía, con las ecuaciones anteriores se define como:

$$(aIV.5) \quad \text{tasa de plusvalía}(i) = \frac{cS}{bV} = \frac{R_{NL}}{LW} = \frac{PY - PX - LW}{LW}$$

En la ecuación anterior aún suponemos que *las tasas de plusvalía*(i) son distintas para cada mercancía (para hacerlas iguales siempre hay tiempo, pero entonces la cosa empeora para Marx). De (aIV.5) se obtiene:

$$(aIV.6) \quad tdp(i) \times LW = PY - PX - LW \quad \text{desde } i = 1 \text{ a } n$$

De (aIV.6) surge que para que la tasa de plusvalía $tdp(i)$ sea positiva ha de ocurrir que:

$$(aIV.7) \quad \text{para } tdp(i) > 0 \Rightarrow PY - PX > LW \quad \text{desde } i = 1 \text{ a } n$$

es decir, que el producto neto de cada mercancía sea mayor que las rentas laborales correspondientes, lo cual es una condición trivial, porque de lo contrario el sistema sería inviable al consumir las rentas parte de las rentas netas ($PY - PX$) e impedir la reproducción del sistema. Pero hay más, de no haber explotación, es decir, si la tasa de plusvalía valiera cero, eso sólo sería posible en el caso particular de que:

$$(aIV.8) \quad \text{para } tdp(i) = 0 \Rightarrow PY - PX = LW \quad \text{desde } i = 1 \text{ a } n$$

En este caso, el excedente de cada mercancía (producto neto) ha ido a parar a las rentas salariales. ¿Podría existir plusvalía negativa? Con *El Capital* en la mano eso es imposible porque el trabajador, según Marx, siempre produce un plusvalor, salvo que la jornada de trabajo fuera tan corta que todo lo que produjera fuera para su sustento y el de su familia. Pero en este caso el empresario no le contrataría porque no obtendría plusvalía (ganancia) para él. Vamos a suponer que la tasa de plusvalía es negativa con una tasa de hasta menos el 100%, es decir, que $tdp(i) = -100\%$. De (aIV.6) sale:

$$(aIV.9) \quad -1 \times LW = PY - PX - LW \quad \text{desde } i = 1 \text{ a } n$$

y queda:

$$(aIV.10) \quad PY = PX \quad \text{desde } i = 1 \text{ a } n$$

que es el caso de la producción sin excedente. Este sistema es inviable salvo que se entienda integrado en PX los consumos de los trabajadores directos. Aún así, por un sistema sin plusvalía (ganancia) los empresarios no contratarían. Pero hemos sido muy radicales, porque el -100% es el caso extremo. Si la plusvalía es negativa, pero sin llegar al extremo de (aIV.10), con un valor tal como $-\tilde{n} \times tdp(i)$, siendo \tilde{n} un coeficiente menor que uno y mayor que cero, queda entonces:

$$(aIV.11) \quad PY - PX = (1 - \tilde{n}) \times LW \quad \text{desde } i = 1 \text{ a } n$$

Como quiera que en este caso se cumple que $0 < 1 - \tilde{n} < 1$, ahora sí hay excedente, que es la expresión que queda al lado derecho de la igualdad, y además es mayor que cero. Conclusión: ¡incluso con plusvalía negativa el sistema es viable técnicamente! Las propias leyes (o lo que es peor, simples definiciones) nos llevan a un absurdo⁷⁹. Siguiendo el criterio de Popper, si la teoría de la plusvalía es siempre cierta, independiente de los salarios, estamos ante una definición que no añade nada al conocimiento (sería un juicio analítico a priori, según Kant); si es una ley han de admitirse varias cosas: 1) que depende del nivel de salarios, además de la duración de la jornada de trabajo; 2) que puede ser cero, porque el sistema es viable técnicamente. O si eso no es así, hay que acotar de forma *ad hoc* el valor mínimo de la tasa; 3) que, aún admitiendo los supuestos de Marx, estos han de acotarse porque pueden darse tasas negativas de plusvalía y el sistema ser, a pesar de todo, viable; 4) ha de admitirse que a partir de cierto nivel tasas de salarios, no pueden darse tasas de plusvalía ($tdp(i)$) positivas porque aquéllos (los salarios) pueden llevarse todo el excedente. Veamos este supuesto. De (aIV.6) se obtiene:

$$(aIV.12) \quad PY - PX = [1 + tdp(i)] \times LW \quad \text{desde } i = 1 \text{ a } n$$

donde la expresión a la derecha de la igualdad es el excedente. Si la expresión de la izquierda permanece constante y las tasas de salarios crecen, eso sólo es posible si la tasa de plusvalía tiende a cero. Para verlo globalmente ($tdp(g)$), es decir, para el conjunto de los sectores, vamos a tomar como numerario al excedente, es decir, a $PYI - PXI$, por lo que hacemos $PYI - PXI = 1$ y queda:

$$(aIV.13) \quad tdp(g) = \frac{1 - LWI}{LWI}$$

Y vemos que, si los salarios W aumentan tal que LWI tiende a 1, la tasa de plusvalía general⁸⁰ ($tdp(g)$) tiende a *cero*. Marx no contempla

⁷⁹ La posibilidad de plusvalías negativas con tasas de ganancia positivas ya lo advirtió Ian Steedman en *Marx alter Sraffa*, 1977 (*Marx, Sraffa y el problema de la transformación*, FCE, págs. 154 y siguientes). Aquí hemos visto esa posibilidad sin condicionarlo a una tasa de ganancia positiva, que es aún más grave para la teoría de la explotación.

⁸⁰ O simplemente, tasa de plusvalía si todos los sectores (mercancías) están sujetas a la misma tasa.

esta posibilidad que surge de sus propias hipótesis y con ello su propio sistema se vuelve incoherente. Nosotros podemos aceptar muchas cosas del sistema de Marx, pero no aquellas que lo hacen incoherente, inviable o rechazable (por contrastación empírica). Por cierto, a expresión parecida llega (mejor parte) Morishima en *Marx's Economics*, 1973, aunque por otros caminos.

Veamos ahora la incoherencia interna del sistema marxiano. Marx parte de dos definiciones (¿o son leyes?): 1) que la tasa de plusvalía es $tdp=S/V$ y que la tasa de ganancia vale $g=cS/(aC+bV)$. De acuerdo con las dos anteriores, la relación entre tasa de ganancia y de plusvalía es como sigue:

$$(aIV.14) \quad \text{tasa ganancia} = \text{tasa de plusvalía} \times \frac{cV}{aC + bV}$$

En la anterior vemos que si la *tasa de plusvalía* tiende a cero, la *tasa de ganancia* también, por lo que parecería sin más que se cumple el teorema fundamental de Okishio en términos de valores marxianos independientemente de la tasa de salarios. En efecto, aun cuando pudiéramos asimilar el capital variable V marxiano transformado en términos de precios bV a la masa de salarios LW (cosa que hemos hecho antes), sea cual sea éste valor en (aIV.14), la tasa de ganancia es positiva (salvo cuando $bV=LW$ fuera cero). En términos de precios ya transformados de los valores se tiene:

$$(aIV.13) \quad tdp(g) = \frac{1-LWI}{LWI}$$

donde la tasa de plusvalía depende del nivel de salarios y de tal forma que si los salarios W aumentan de tal forma que le llevan a 1 en la ecuación anterior (que es el valor del producto neto⁸¹ $PYI-PX$), ocurre entonces que la tasa de plusvalía (de explotación) vale cero. Hay pues una contradicción entre (aV.14) y (aV.13). ¿Cómo se soluciona? De una de estas dos formas: o negando cualquier trasiego entre valores y

⁸¹ Recordar que tomar un numerario en un sistema de ecuaciones y darle valor 1 a una expresión es una forma de decir que se dividen todas las ecuaciones por esa expresión, por lo que las nuevas variables debieran ir con una señalización distinta que las anteriores. No obstante, no se hace para no confundir al lector.

precios, o negando que la tasa de plusvalía sea siempre positiva *independientemente* del nivel de los salarios. Pero de las definiciones de Marx (¿o son leyes?) no se desprende eso.



Apéndice V: MARX DESDE SRAFFA
(respuesta a Fernando Hugo Azcurra, II parte)

Quisiera en esta segunda parte abordar de forma original –si algo de talento tengo para ello- el problema de cómo preservar la teoría de la explotación de Marx sin necesidad de pasar por las horcas caudinas de la transformación de valores a precios. No pretendo hacer una historia del problema de la transformación porque eso ya se ha hecho con profusión, aunque me detendré en algún momento en la forma en que lo han abordado, por ejemplo, Ian Steedman y Michio Morishima; y no por afán de cita o apoyo a las tesis que sostendré, sino porque ambos son originales y distintos, casi contrarios. También porque lo que intento no es exactamente lo mismo que ellos. El problema anterior es de segundo nivel respecto al interés mío que es el de responder a la cuestión de si es posible integrar a Marx en los fundamentos de Sraffa. Más precisamente, yo planteo que sí es posible integrar la teoría de la explotación de Marx en la teoría del excedente de Sraffa. Este hecho no se me había planteado hasta el artículo que escribió y me mandó Fernando Azcurra, por lo que le estoy agradecido a pesar de su tono crítico contra los artículos sobre los *Fundamentos para una nueva teoría económica*. Pero ello es provechoso porque se mantiene en el plano intelectual, por así decirlo. Intentaré además distinguir dos planos: 1) el plano de la posibilidad de la integración de la economía de Marx (que aborda multitud de temas) en la teoría limitada de Sraffa, que es la del excedente, de tradición clásica; 2) el plano de mi crítica sobre algunas cuestiones que plantea Marx y que están cerca de las que hace Steedman. En concreto, tengo reservas al menos sobre dos cuestiones: sobre si la teoría de la explotación es *sólo* propia del sistema capitalista; si es satisfactoria la teoría de la transformación de valores a precios de Marx, incluso subsanada de sus defectos. Tal como yo entiendo la secuencia de Marx desde el punto de vista de la lógica económica⁸² en *El Capital* es la siguiente: de la teoría de la explotación

⁸² Aunque también es admisible anteponer la teoría del valor-trabajo a la teoría de la explotación. Esta interpretación tiene la ventaja de la evolución histórica de la teoría del valor-trabajo. Sin embargo, en mi opinión, no sería la correcta, porque la teoría de la explotación tiene un grado de abstracción y nuclear en el sistema de Marx más alto y más importante. Y lo presento así, a costa de que pueda interpretarse que rectifico al propio Marx en cuanto al orden de presentación en su obra en ambos temas. De lo que estoy convencido –pero abierto a otras interpretaciones- es que el modelo que desarrolla Marx en *El Capital* puede sobrevivir sin la teoría del valor-trabajo, pero no puedo hacerlo sin la teoría de la explotación. Y en cuanto al problema de la transformación de valores a precios, mi punto de vista es el contrario: sólo puede sobrevivir la teoría del valor-trabajo si la despojamos de su aspecto *contable*, es decir, si se abandona el cálculo de los precios mediante la transformación. Decía Einstein que el mayor error de su vida fue la constante cosmológica que había introducido en

(plusvalía) a la teoría del valor trabajo, y de ésta a la transformación de valores a precios. Mi opinión es que esta secuencia tiene grados de abstracción diferentes, de tal manera que puede mantenerse el núcleo duro de la teoría de Marx -que es la teoría de la explotación- abandonando la transformación de valores a precios por no reflejar (cosa distinta a identificar) lo suficiente de *la realidad* una teoría de los precios aceptable. Estamos siempre en el campo de la teoría, porque cualquier explicación de la realidad se mantiene siempre en el otro lado del espejo, en el lado de lo teórico. Pero al menos debe reflejar, aunque sólo al trasluz, esa realidad a pesar del muro infranqueable que es el espejo. No hay que tener miedo de pecar por acercarse a la realidad porque es imposible una explicación empírica, son términos antitéticos, una contradicción en los términos. La realidad sin teoría es mera estadística. Leyendo estos días un libro sobre el gran matemático Gottlob Frege (*Introducción a Frege*) me he persuadido aún más de que, por más que intentemos acercarnos a la realidad, nunca se puede caer en un empirismo si de lo que se trata es de explicarla. Define Frege algo tan aparentemente empírico como el número -los números- como “*una aserción sobre un concepto*”⁸³. Lo avanzo para cuando entremos en la formalización del modelo que se pretende. No tengas miedo Fernando, que por más que una teoría como la de Sraffa pueda adecuarse a lo que hacen los comerciantes -calcular los precios mediante un margen sobre los costes-, nunca nos salimos de la explicación, salvo que, claro está, sólo hagamos estadísticas. Y sin embargo, esta forma de entender los precios es mucho más cercana que la teoría marginalista basada en igualar los ingresos marginales con los costes marginales, ingresos y costes que la mayoría de los empresarios ni saben conceptualmente lo que es, ni, aun sabiéndolo, podrían calcularlos por falta de información. Volviendo a Marx, acepto íntegra la teoría de la explotación de Marx. Daré una cita del alemán que puede ser significativa de su teoría. Diré antes que en un libro como *El Capital* podemos encontrar citas no equivalentes, incluso algunas contradictorias, por lo que han de recogerse las que puedan ser representativas. Creo que esta lo es. Dice Marx que “*el obrero añade al objeto sobre el que recae el trabajo nuevo valor, incorporándole una cantidad de trabajo, cualesquiera que el contenido concreto, el fin y el carácter técnico de este trabajo sean*”⁸⁴. Entiendo que es el plano objetivo de la explotación, la condición necesaria para la plusvalía, sin entrar todavía en las relaciones

sus ecuaciones de campo de la relatividad general; análogamente, podríamos decir que el mayor error de Marx en su modelo es forzar un cálculo de los precios basado en la transformación a partir de los valores *contables* de su teoría del valor.

⁸³ Introducción a Frege, A. Kenny, edit. Cátedra, 1997, pág. 100 (*An Introduction to the Founder of Modern Analytic Philosophy*, 1995).

⁸⁴ *El Capital*, I vol., FCE, pág. 151.

de clase que han de establecerse para que el capitalista arranque del obrero esa posibilidad objetiva. Más adelante Marx rebaja el grado de abstracción de lo anterior y se vuelve más explicativo cuando dice que *“las masas de valor y de plusvalor producidas por capitales distintos están, suponiendo que se trata de valores dados y de grados de explotación de la fuerza de trabajo, en razón directa a las magnitudes de la parte variable de aquellos capitales, es decir, de las partes invertidas en fuerza de trabajo viva”*⁸⁵. El límite de la plusvalía lo acota Marx cuando señala que *“partiendo de una magnitud de población dada, este límite –se refiere la plusvalía– lo traza la posible prolongación de la jornada de trabajo”*⁸⁶. Esta es, por cierto, la interpretación de Morishima (*Marx's Economics*) para desarrollar formalmente el teorema de Okishio. Aceptada la teoría de la explotación y negado el método de transformación de valores a precios por no ser un reflejo idóneo de la realidad, nos quedaría el estado intermedio, la conexión entre ambos: la teoría del valor trabajo. Traigo a colación un texto de Marx que, en mi opinión, explica como nadie su teoría del valor-trabajo, que, además, no es un texto de *El Capital* sino de *Miseria de la Filosofía*: *“El valor no es el tiempo en el cual una (mercancía) ha sido producida, sino el mínimo de tiempo en el cual es susceptible de ser producida, y este mínimo se atestigua por la competencia”*⁸⁷. Es un valor contable, hipotético, no el estadístico. Con este texto se aparta de una mera teoría ricardiana del valor-trabajo como el del tiempo necesario para producirlo para desarrollar una teoría de valores *contables*, donde la competencia juega un papel decisivo. Lo traigo a colación porque lo que viene a continuación supone renunciar a esta consideración sobre la formación de los precios a partir de esta teoría del valor. Es de justicia para valorar lo que se alcanza saber a lo que se renuncia. En todo caso podemos sustituir la idea de valor de Marx en este texto por el de precio y la cosa deja el camino expedito al modelo de Sraffa, donde los precios son fruto de 4 cosas o condicionantes: 1) son precios de equilibrio del sistema, 2) son precios de intercambio, 3) son precios obtenidos sobre tasas hipotéticas unitarias de ganancia y salarios, 4) son precios a largo plazo. La ventaja de partir de Sraffa es que estos defectos o limitaciones son subsanables. Lo mejor de ambas teorías, la de los valores (Marx) y la de los precios (Sraffa) es que no son incompatibles si eludimos el tema de la transformación. Para su tratamiento vamos a construir un modelo en el que aceptamos ambas definiciones de valores y precios.

⁸⁵ *El Capital*, I vol., FCE, pág. 245.

⁸⁶ *El Capital*, I vol., FCE, pág. 247.

⁸⁷ *Miseria de la Filosofía*, Ediciones Júcar, pág. 116.

A) Modelo Sraffa-Marx de producción simple

El modelo de Marx vendría dado por la ecuación matricial:

$$(1) \quad \begin{matrix} T & Y & = & C & + & V & + & S \\ nxn & nxn & & mxn & & mxn & & mxn \end{matrix}$$

donde T es una matriz de valores (unitarios), cuyo elementos representan el valor-trabajo de la mercancía i (de 1 a n) procedente del sector o proceso j (de 1 a n). Los signos C , V , S representarían los capitales constantes, variables y plusvalía de, también, las mercancías i procedentes de j ; Y sería la matriz $n \times n$ de productos finales. Aceptamos también las consideraciones de Marx sobre la composición orgánica de capital (K) y la teoría de la explotación (E), pero la formalizamos mediante las matrices K y E de $n \times n$ elementos. Ello supone partir de distintas composiciones orgánicas y tasas de explotación por bienes y servicio y sectores (o procesos), pero si se quiere simplificar y hacer iguales las composiciones por mercancía no hay ningún problema; lo mismo con las tasas de explotación. También se puede simplificar por sector hasta convertir las matrices K y E en simples escalares. Con estas consideraciones, las ecuaciones de Marx para composiciones orgánicas y tasas de explotación serían:

$$(2) \quad \begin{matrix} C & = & V & K \\ nxn & & nxn & nxn \end{matrix}$$

$$(3) \quad \begin{matrix} S & = & V & E \\ nxn & & nxn & nxn \end{matrix}$$

Hasta aquí la formalización de la teoría del valor-trabajo de Marx partiendo de la teoría de la explotación. Del conjunto de las ecuaciones (1), (2) y (3) se obtiene:

$$(4) \quad TY = V[I_d + K + E]$$

donde I_d es la matriz diagonal de unos $n \times n$. Hasta aquí lo que aporta Marx al modelo. Ahora traemos a colación el modelo de Sraffa tal como lo presenta el economista italiano en *Producción de...*, aunque luego lo generalicemos porque a mí me parece demasiado restrictivo.

$$(5) \quad PY = wL + (1 + r)PX$$

$$(6) \quad PY = (1 + R)PX$$

$$(7) \quad PYI - PXI = 1$$

$$(8) \quad LI = 1$$

donde P es el vector de precios $1 \times n$, w la tasa de salarios, L el vector de inputs de trabajo $1 \times n$, r la tasa de ganancia, X la matriz $n \times n$ de medios de producción y R es la razón-patrón (= a la tasa de ganancia máxima en la producción simple *esrafiana*). Y ahora viene la ecuación decisiva, la que va a unir el universo de Marx con el de Sraffa, los valores del primero con los precios del segundo sin pasar por la transformación. Es como sigue:

$$(9) \quad \begin{matrix} P & Y & = & u & T & Y \\ 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n & n \times n \end{matrix}$$

donde u es un vector de transformación de valores a precios. Es una de las dos condiciones que poner Marx para pasar de valores a precios: que el valor de todo lo producido en términos de precios sea igual que en términos de valor. Veremos que no es necesario calcular los coeficientes u porque desaparecerán. Entre (4) y (9) se obtiene:

$$(10) \quad \boxed{P = uV[I_d + K + E]Y^{-1}}$$

Y la ecuación (10) nos da los precios en función de la tasa de explotación y composición orgánica de Marx sin pasar por la transformación. Y en (10) cabe toda la teoría de la explotación (E) de Marx. Incluso la teoría del valor-trabajo, porque (10) se ha obtenido a partir de ella (1). Pero sin embargo Sraffa no aparece. Para ello vamos a establecer, no sólo la equivalencia general de Marx entre valores y precios (9), sino las parciales correspondientes a la del valor de los medios de producción y el capital constante, la de las masas de salarios y capital variable, y la de la ganancia total y la plusvalía total (ésta inspirada por Marx).

$$(11) \quad \begin{matrix} P & X & = & u & C \\ 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & m \times n \end{matrix}$$

$$(12) \quad \begin{matrix} w & L & = & u & V \\ 1 \times n & & & 1 \times n & n \times n \end{matrix}$$

$$(13) \quad \begin{matrix} r & P & X & = & u & S \\ 1 \times n & n \times n & & 1 \times n & n \times n \end{matrix}$$

De entre (10) y (12) sale:

$$(14) \quad P = wL[I_d + K + E]Y^{-1}$$

Ahora en (14) ya va asomando la patita -la tasa de salarios w - de Sraffa, pero aún no es suficiente. Del conjunto de ecuaciones (5), (6), (7) y (8) obtenemos la ecuación de la razón-patrón de Sraffa para la producción simple:

$$(15) \quad w = \frac{R - r}{R}$$

Y ahora entre (14) y (15) sale:

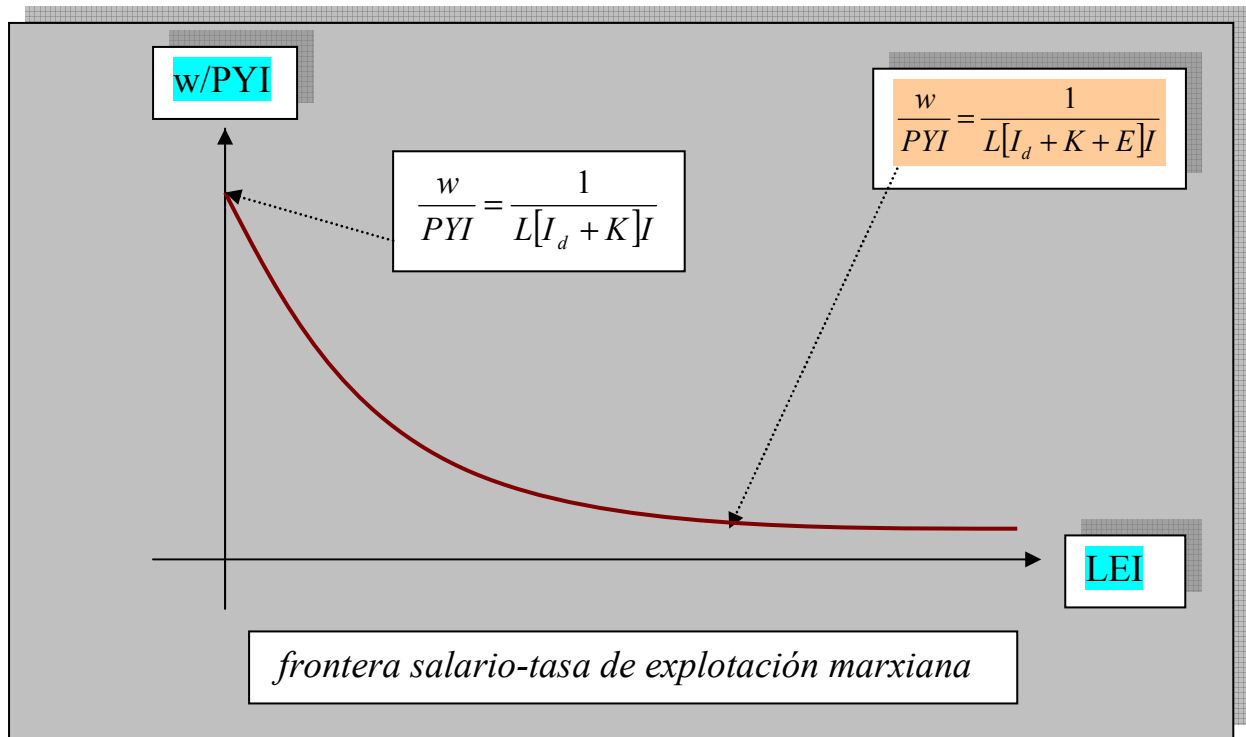
$$(16) \quad P = \frac{R - r}{R} \times L[I_d + K + E]Y^{-1}$$

¡Y ahora sí hemos relacionado los precios con la tasa de explotación marxiana (E) y con la razón-patrón *esraffiana* (R)! Es verdad que no están los salarios, pero estos aparecen implícitos en las tasas de explotación E . De (16) haremos algunas observaciones: 1) Se puede observar que si la tasa de ganancia r es cero, los precios son proporcionales a los valores (I_d+K+E) , tal como señala la tradición clásica, desde Ricardo a Sraffa pasando por Marx; 2) Los precios son inversamente proporcionales a la productividad del trabajo (LY^{-1}), pero mediatizados por las composiciones orgánicas (K) y las tasas de explotación (E); 3) Los precios son proporcionales a los salarios w (ecuación 14). Si estamos en la producción simple, los precios P serán estrictamente positivos porque la matriz inversa Y de productos finales es positiva por ser una matriz diagonal; en cambio no podemos asegurar eso en la producción conjunta porque Y no sería diagonal y su inversa no necesariamente positiva. Ahora, a partir de (14) podemos obtener la frontera salario-tasa de explotación, equivalente a la de salario-ganancia. En efecto, si post-multiplicamos (14) por Y y despejamos w/PYI sale:

$$(17) \quad \frac{w}{PYI} = \frac{1}{L[I_d + K + E]I}$$

La ecuación (17) nos dice al menos tres cosas: 1) que la tasa de salario es la más alta posible si las tasas de explotación E valen cero; 2) que por más que aumente la tasa de explotación, la tasa de salarios no llegará a cero; 3)

que la tasa de salario real (w/PYI) será menor cuanto mayor sean los precios de equilibrio calculados de forma *autónoma* en el sistema de precios de Sraffa. En realidad ahora la suma del valor de los bienes y servicios finales (PYI) actúa como numerario, razón por la cual ya no tenemos la relación de la razón-patrón (15), lo cual no cambia el fondo de la cuestión.



B) Modelo Sraffa-Marx de producción conjunta generalizada

La ecuación que define la producción conjunta a partir de Sraffa pero con salarios *pre-factum* es como sigue:

$$(18) \quad \underset{1 \times n}{P} \underset{n \times n}{Y} = \left[\underset{1 \times n}{L} \underset{n \times n}{W} + \underset{1 \times n}{P} \underset{n \times n}{X} \right] \underset{n \times n}{(I_d + G)}$$

A partir de ésta obtenemos la ecuación de la tasa máxima haciendo cero los salarios:

$$(19) \quad PY = PX(I_d + G_m)$$

Con las dos anteriores se obtiene la ecuación de precios:

$$(20) \quad P = LW(I_d + G)(G_m - G)X^{-1}$$

Ahora ponemos la ecuación inspirada en el 2º criterio de Marx tal que *la suma* de las ganancias se iguala con *el total* de las plusvalías:

$$(21) \quad [LW + PX]GI = uSI$$

Y el cuadro está completo con las ecuaciones (1), (13), (20) y (21) se obtiene:

$$(22) \quad LW [I_d + (I_d + G)(G_m - G)^{-1}]GI = LWEI$$

que relacionan entre si las múltiple tasas de explotación *marxianas* con las tasas máximas de ganancia *esrafianas*. Salarios, ganancias e inputs serían comunes. No tenemos la razón-patrón porque estamos en la producción conjunta. Para facilitar la visualización de la relación implicada en (22) vamos a pasar a tasas unitarias de ganancia (g), ganancia máxima (g_m) y de explotación (e), pero no obtenidas de forma arbitraria, sino a tasas obtenidas por las 3 ecuaciones:

$$(23) \quad LW [I_d + (I_d + G)(G_m - G)^{-1}]GI = \frac{w(1 + (1 + g))g}{g_m - g} LI$$

$$(24) \quad LWEI = ewLI$$

$$(25) \quad PX (I_d + G_m)I = (1 + g_m)PXI$$

Hecho eso, la (22) se convierte en:

$$(26) \quad (g_m - g)(e - g) = (1 + g)g$$

y despejada la tasa de ganancia queda:

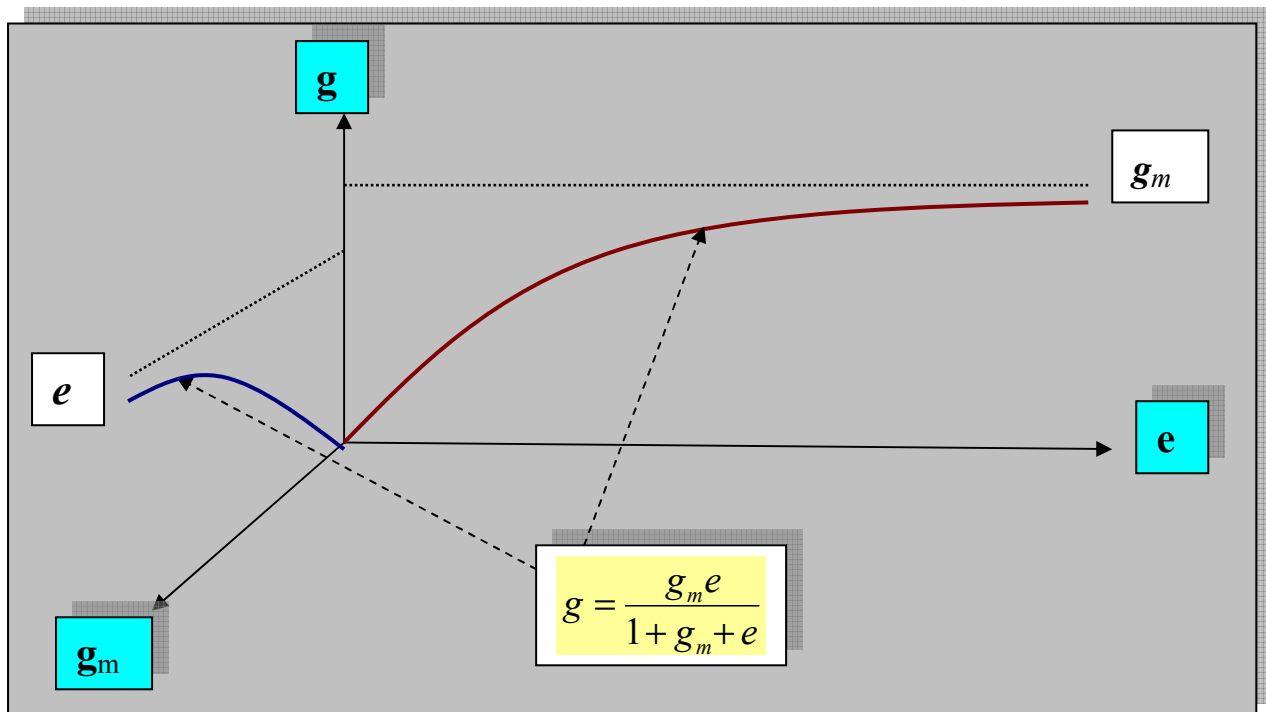
$$(27) \quad g = \frac{g_m e}{1 + g_m + e}$$

y hemos llegado a una forma modificada del teorema de Okishio-Morishima (O-M)⁸⁸: *que la condición necesaria y suficiente para que la tasa de*

⁸⁸ "Para que exista un conjunto de *precios positivos* es necesario y suficiente que se de un tipo de salarios reales tal que el grado de explotación sea positivo": A *matematical Note on Marxian Theorems*, Okishio.

ganancia (esrafiana) sea positiva es que la tasa de explotación (marxista) lo sea también. Hay que recordar que el teorema de O-M se refiere a la condición de precios positivos, pero ésta es plenamente marxista y obtenida a partir de la tasa de explotación de Marx sin ningún condicionante. Y (27) se cumple para cualquier nivel de precios, cualesquiera que sean los medios de producción, los productos finales y los capitales constantes. Se puede demostrar (ver *Descifrando a Sraffa*) que la tasa de ganancia máxima g_m depende de los medios y productos finales en la forma de $g_m = f(X^{-1}(Y-X))$, con lo que la tasa de ganancia puede ser expresada como:

$$(28) \quad g = \frac{f(X^{-1}(Y-X))e}{1 + f(X^{-1}(Y-X)) + e}$$



Los salarios han desaparecido porque están subsumidos en la tasa de explotación, y la tasa de ganancia sólo depende de dos de las tres variables no monetarias de Sraffa (medios y productos finales). Es verdad que con ello ha desaparecido el grado de libertad entre salarios y ganancias que es –en mi opinión– una de las tres condiciones necesarias para ser considerado un modelo como esrafiano, pero el hecho es inevitable porque se ha añadido una condición adicional: la tasa de explotación de Marx. Es el precio que hay que pagar por *embutir* la teoría de la explotación de Marx en la teoría del excedente de Sraffa.

C) La dificultad de la teoría de la explotación

Vistos los dos epígrafes anteriores parecería que la teoría de la explotación de Marx hubiera salido triunfante en su enfrentamiento con Sraffa salvo las dos heridas antes apuntadas: la pérdida del grado de libertad del modelo del italiano y la renuncia a la teoría de la transformación de valores a precios de Marx. Incluso que el teorema de Okishio-Morishima no tuviera problemas y que la teoría de la plusvalía de Marx descansara sólo –como nos dice Morishima y un texto de Marx– en la mera prolongación de la jornada de trabajo. La cosa no es tan sencilla porque veremos ahora que todo lo anterior es sólo un caso particular, se debe a un supuesto que hemos hecho que es más que cuestionable. Este viene definido por la ecuación (21). Es decir, siguiendo el segundo criterio de Marx para relacionar precios y valores (unitarios), hemos supuesto que el valor de las ganancias obtenidas a partir de los precios (de Sraffa) es igual al valor de la plusvalía obtenida a partir de los valores-trabajo (de Marx), mercancía a mercancía. Supongamos que eliminamos este supuesto y nos deshacemos de la igualdad (21). Nos queda ahora las ecuaciones *esrafianas* y *marxianas* siguientes:

$$(29) \quad \begin{matrix} T & Y & = & C & + & V & + & S \\ nxn & nxn & & nxn & & nxn & & mxn \end{matrix}$$

$$(30) \quad \begin{matrix} C & = & V & K \\ nxn & & nxn & nxn \end{matrix}$$

$$(31) \quad \begin{matrix} S & = & V & E \\ nxn & & nxn & nxn \end{matrix}$$

$$(32) \quad \begin{matrix} P & Y & = & u & T & Y \\ 1xn & nxn & & 1xn & nxn & nxn \end{matrix}$$

$$(33) \quad \begin{matrix} P & Y & = & (1 + g) & [& w & L & + & P & X &] \\ 1xn & nxn & & & & 1xn & & & 1xn & nxn \end{matrix}$$

$$(34) \quad PY = (1 + g_m)PX$$

Las 3 primeras ya las hemos discutido y corresponden a la modelización de la teoría del valor-trabajo de Marx (29), a la compasión orgánica de capitales (30) y a la teoría de la plusvalía (31). La (32) es en enlace entre los precios de Sraffa y los valores de Marx. Por último, la (33) es la definición del sistema esrafiano pero con salarios pre-factum, mientras que la (34) surge de hacer cero la tasa de salarios en (33), con g_m como tasa máxima de ganancia (la gran aportación de Sraffa al modelo integrado).

Pues bien, si integramos este conjunto de ecuaciones en una sola y dejamos la tasa de ganancia g como variable dependiente queda:

$$(35) \quad g = \frac{g_m \times uV [I_d + K + E] I - w LX^{-1} Y I}{uV [I_d + K + E] I + w LX^{-1} Y I}$$

Por supuesto que para poder despejar la tasa de ganancia hicimos el supuesto de que:

$$(36) \quad PYI = g_m uV [I_d + K + E] I = \frac{w(1+g)}{g_m - g} \times LX^{-1} Y I$$

es decir, igualamos en términos de valores totales (no mercancía a mercancía) precios *esrafianos* con valores *marxianos*. Ya hemos dicho que la gran ausente de (35) es la (21), es decir, la que permite igualar ganancias *esrafianas* con plusvalías *marxistas*. Pero en (35) la sorpresa es terrible porque esta ecuación nos dice que ¡la tasa de ganancia g puede ser positiva aun cuando las tasas de explotación E sean cero! En efecto, con esta consideración (35) queda:

$$(37) \quad g(E=0) = \frac{g_m \times uV [I_d + K] I - w LX^{-1} Y I}{uV [I_d + K] I + w LX^{-1} Y I}$$

Y (37) valdrá cero para el caso particular de que la tasa de salarios w y los capitales variables estuvieran en relación tal como:

$$(38) \quad w(g=0; E=0) = \frac{g_m \times uV [I_d + K] I}{LX^{-1} Y I}$$

¡que sólo lo será por casualidad! La tasa de salarios no ha de ser una tasa cualquier sino aquella que surja de las ecuaciones (23), (24) y (25) si partimos de un sistema formal de ecuaciones con $n \times n$ tasas de explotación, ganancia, salarios y ganancias máximas. Nada pues de tasas arbitrarias, sino a partir de datos tomados de la realidad (realidad, Fernando, como fenómeno, no como nómeno kantiano). Ahora, para evitar que se nos derrita Marx hemos de suponer que (38) se cumple siempre. O al menos para que se cumpla la interpretación de Morishima de la economía de Marx y partir del teorema de Okishio-Morishima reflejado parcialmente en (27). En el epígrafe anterior y para que se cumpla el teorema hemos supuesto (ahora lo sabemos) que ha de

cumplirse (38). En todo caso, si obligamos a que se cumpla (38) - que es una ecuación determinística de los salarios en función de las composiciones orgánicas, de los capitales variables, de la tasa máxima de ganancia *esrafiána* y de las variables no monetarias *esrafiánas* del trabajo, medios y productos finales- hemos perdido la tasa de ganancia (implícita en el capital variable V); y hemos perdido con ello el grado de libertad *esrafiáno* del excedente entre salarios y ganancias. Sabíamos que eso era inevitable si introducíamos las nuevas condiciones sobre las tasas de explotación (aun cuando obviemos las composiciones orgánicas, es decir, aun cuando sustituyamos en (35) la matriz de esta composiciones por los capitales constantes directamente, es decir, aun cuando nos olvidemos de la ecuación (30)). Visto desde mi punto de vista en cuanto que Sraffa ha de constituir los fundamentos de una nueva teoría económica, la pregunta es: ¿merece la pena acabar con una de las tres patas del banco de estos fundamentos *esrafiános* a cambio de introducir la teoría de la explotación de Marx? Lo dejo en el aire. Hay siempre una solución: suponer que el salario *esrafiána* w y los capitales variables marxianos V son tales que (38) se cumple siempre por definición de capital variable. Pero si aceptamos eso, la cuestión que se plantea es que esa relación parece que ha de cumplirse no sólo en el modo de producción capitalista (visión de Marx), sino en cualquier otro (versión antimarxista). Un dilema que parece insoluble.

Observando (35) puede darse el caso de ganancias positivas con plusvalías negativas. La primer vez que contemplé esta posibilidad la deseché por creer que carecía de fundamento en el marco de una teoría de la explotación. Sin embargo, cuando leí posteriormente hace ya algunos años a Steedman me hizo reconsiderar la cuestión. Dice Steedman que *“la plusvalía, definida como el total del trabajo vivo menos el total del trabajo incorporado en los salarios incorporado en los salarios reales de los trabajadores, resultará negativo aunque la tasa de ganancia y los precios de producción sean positivos”*⁸⁹. Lo que plantea Steedman es de hondo calado y apenas me atrevo a decir algo al respecto. El texto anterior viene a decir que si el valor -en términos de valor-trabajo marxiano- de los bienes que consumen los asalariados (obreros si se quiere) es superior al valor que ellos generan en el proceso productivo, es inobjetable que la plusvalía (absoluta) es negativa. Pero eso choca con la concepción del propio Marx de que la plusvalía es la diferencia entre el valor de la fuerza de trabajo (el retribuido) y el valor incorporado con su trabajo al producto final. Esta última puede ser entendida como un cociente y de tal manera que el denominador es la causa del numerador, lo cual impediría siempre que la

⁸⁹ Ver pág. 154 de *Marx, Sraffa y el problema de la transformación*, edit. FCE.

plusvalía fuera negativa. Esta es al menos mi interpretación de la plusvalía marxista. Ocurre que la interpretación de Steedman tampoco puede ser desechada por marxista, con lo cual entramos en un problema de coherencia interna del texto del alemán. Yo no me pronuncio al respecto, pero dejo ahí planteada la cuestión. Cuestión, por otro lado, que ha sido puesta en evidencia cuando pasamos de los conceptos y las ideas a estructuras de conocimiento que –afortunadamente en este caso– pueden ser objeto de formalización. Señalar que esta posible conclusión que se desprende de la ecuación (35) se ha obtenido por vía distinta de la de Steedman, pero no deja de ser significativo obtener las mismas conclusiones partiendo de interpretaciones distintas del texto de Marx.

D) La visiones de Morishima y Steedman: una paradoja

Morishima hace depender la tasa de explotación sólo de la posibilidad de prolongar la jornada de trabajo. La razón de ello es que concibe la posibilidad de partir la jornada de trabajo en función de los dos valores que le atribuye Marx: como valor del trabajo y como valor de la fuerza de trabajo (salario)⁹⁰; como valor de uso y como valor de cambio. Dice Morishima que: “*el problema de la determinación del grado de explotación se reduce al de la determinación de la jornada de trabajo*”⁹¹. Es posible encontrar textos de Marx que avalen esta manera de pensar tal y como hemos hecho en un epígrafe anterior. El problema de ello es que si se demuestra que el teorema de de Okishio-Morishima sólo es cierto bajo esa condición (tal y como hemos hecho en el epígrafe anterior), la teoría de la plusvalía de Marx se viene abajo. Sólo si consideramos que la diferenciación entre el valor de uso y de cambio, entre trabajo y valor de la fuerza de trabajo es relativa y no absoluta podemos asegurar que, sea cual sea la jornada de trabajo, hay explotación. Si se aceptara la tesis de Morishima pasarían dos cosas: 1) si la jornada se reduce hasta un cierto límite dejaría de haber explotación; 2) en todo caso, si todo el aspecto cuantitativo de la teoría de la explotación se redujera a la posibilidad de la prolongación de la jornada de trabajo, nada garantizaría que la teoría de la explotación fuera sólo propia del sistema capitalista. Afortunadamente se puede rebatir a Morishima (ver mi *Aspectos de la economía de Marx*). Morishima hace un mal uso de las matemática y sustituye el concepto de explotación que ha de darse siempre en el sistema capitalista de acuerdo en general con Marx –salvo su desafortunado texto sobre la jornada de trabajo– porque el grado es una cuestión de cociente y no de suma. Marx

⁹⁰ Ver pág. 448 de *El Capital* (I vol., sección sexta: el salario).

⁹¹ *La teoría Económica de Marx*, edit. Tecnos, 1977 (*Marx's Economics*, 1973).

expresa los cocientes entre *plusvalía* y *capital variable*, *plusvalía* y *valor de la fuerza de trabajo*, y *trabajo excedente* y *trabajo necesario*⁹² como equivalentes y como índices de la tasa de explotación. Y si no queremos que Marx desaparezca ante nosotros por el desagüe debemos pensar que los diversos numeradores de estos cocientes vienen causados por los denominadores. Morishima no lo piensa así y toma el texto literal de Marx. Cree con ello reafirmar la teoría de la explotación de Marx, cuando en realidad cava la tumba del alemán sin darse cuenta.

El punto de partida de Steedman sobre Marx es la contraria. Dice por ejemplo que *“la solución del problema de la transformación ofrecida por Marx es por entero inaceptable; es internamente incoherente aun cuando se transformen los precios en insumos”*⁹³. Yo sólo me quedo con la primera parte de la crítica, pero no con la segunda. De hecho, ya sabemos que ese proceso de transformación de Marx de valores a precios es sólo la primera solución de una cadena de Markov a partir de las condiciones de Marx. Marx calcula la plusvalía de cada sector (podría ser de cada mercancía) en función del capital variable y luego reparte proporcionalmente la suma de las plusvalías a la suma de los capitales constante y variable de cada sector (podría ser mercancía). En el mundo real nada es parecido a eso, porque ello supondría que las empresas, cuando calculan su ganancias, deberían saber la plusvalía global del sistema; tampoco se ve por qué habrían de obrar así para poner los precios en lugar de tener en cuenta sus costes y sus posibles ingresos, y sólo los suyos. No se ve por ningún lado las fuerzas del sistema que llevaran a un cálculo de los precios a partir de esa manera de sumar a los costes (en términos de valores marxianos, los capitales constantes y variables) las plusvalía repartidas con el criterio mencionado. Steedman no lo cuenta así, pero así es como hay que sobreentenderlo. Lo que pasa es que no es incoherente, sino falso, inadecuado, no refleja –ni como reflejo– la realidad. Lo de inaceptable en la cuestión de los precios viene porque, calculado los precios como transformación de valores como antes se ha señalado, sólo por casualidad puede coincidir con un sistema en el que –como hace Sraffa– aquéllos (los precios) depende de los medios de producción fechados en el tiempo y de la parte del excedente que se llevan los salarios. Steedman tira del teorema de Perron-Frobenius a partir de la ecuación de definición del sistema $PY = (1+r)(wL+PX)$. Nosotros hemos igualado valores unitarios y precios en la ecuación (9), y por ello ha resultado la ecuación (16) de determinación de los precios en función de las composiciones orgánicas

⁹² Pág. 444 de *El Capital* (I vol., cap. XVI).

⁹³ Pág. 35 de *Marx, Sraffa y el problema de la transformación*, FCE, 1985 (*Marx after Sraffa*, 1977).

de capital, de las tasas de explotación (o unitarias si se quiere), del trabajo directo, de la tasa de ganancia, de la razón-patrón de Sraffa y de los productos finales. Ello nos ha permitido dar una versión reducida del teorema de Okishio-Morishima, pero a costa de pagar dos peajes: 1) perder el grado de libertad esrafiano entre salarios y ganancias; 2) abandonar de una vez para siempre el cálculo de los precios a partir de la transformación de valores. Cada uno -Sraffa y Marx- han cedido una parte para poder integrarlos. Por un procedimiento análogo al nuestro -aunque no enteramente igual- Steedman llega a la misma fórmula que la nuestra en la determinación de la tasa de ganancia⁹⁴. Cuando di con esta formulación -ecuación (27)- no recordaba esta parte de la obra de Steedman, lo cual me llenó de satisfacción porque ambos habíamos llegado al mismo resultado por caminos diferentes. Y esta fue doble porque con ello se consigue dos cosas: 1) salvar la teoría de la explotación de Marx; 2) hacer depender las ganancias *sólo* de la tasa de explotación. La paradoja está servida: en apariencia Steedman ataca con dureza la teoría de la transformación de Marx para el cálculo de los precios y con ello salva el núcleo de la teoría de Marx; Morishima, queriendo salvar todo Marx a partir de la plusvalía como prolongación de la jornada de trabajo, le crea al alemán un problema insoluble. Hay ciertamente amistades peligrosas.

E) A modo de conclusiones

Podríamos resumir todo el artículo de la siguiente manera: 1) La teoría de la transformación de valores a precios de Marx es inasumible porque no se adecua en el plano teórico a un comportamiento sociológico de los actores supuestamente implicados. A ello le añade Steedman que es incoherente, tesis que no se trae a colación, es decir, ni se demuestra ni se refuta; 2) Se acepta entera la teoría de la explotación de Marx y se integra en la teoría del excedente de Ricardo; 3) El punto anterior tiene un doble peaje: a) hay que renunciar al grado de libertad entre salarios y ganancias de Sraffa, b) hay que renunciar también a la parte *contable* de la teoría del valor-trabajo de Marx para ser sustituida por la de la formación de los precios de Sraffa; 4) Con ambas renunciaciones se puede mantener íntegra la teoría de la explotación de Marx dentro de la teoría del excedente de Sraffa; 5) El resultado final es un modelo integrado y coherente de 3 elementos (teoría del excedente, de la explotación y de los precios) que no es ni plenamente esrafiano ni plenamente marxista, pero que conserva el núcleo duro de ambos.

⁹⁴ Pág. 122 de *Marx, Sraffa y el problema de la transformación*.

Este artículo ha de entenderse como la segunda parte del titulado *Sraffa y la teoría del excedente*, de tal forma, que este segundo no tiene sentido sin el primero. He intentado en ambos hablar de teoría económica con apoyo de las matemáticas y no de construir un mero modelo matemático con conceptos económicos. No sé si lo he conseguido.

Madrid, 29 de diciembre de 2011.

Apéndice VI - MARX, SRAFFA Y EL USO DE LAS MATEMÁTICAS

(Respuesta a Fernando Hugo Azcurra, III parte)

Inicio con este artículo una nueva réplica a Fernando Azcurra por su contestación a los artículos míos sobre las relaciones y posibilidades de integrar en un modelo único a Marx y Sraffa. De esto porque esa es mi intención, no porque sea la de Fernando, que creo defiende la posición absolutamente contraria, además de abordar otras cuestiones. En su réplica dices que no me ocupo de “cada uno de los puntos a los que me refería”. En algunos creo que sí pero, en términos generales, tienes razón porque mi interés no es entrar en una discusión sobre conceptos –y menos sobre supuestas esencias–, sino de estructurar un pensamiento (necesariamente creativo en parte) que permita integrar la teoría de la explotación del alemán en la teoría del excedente del italiano. Y más aún, desarrollar la concepción del italiano si es menester para que entre la teoría de la explotación a sabiendas, además, que no puede entrar la teoría de la transformación de valores a precios de Marx por errónea, tanto desde el punto de vista de su coherencia interna como por no corresponderse con los comportamientos de los actores implicados (gestores, empresarios) dentro del capitalismo o, como concibe Marx, dentro del *modo de producción capitalista*. Mi punto de vista en general sobre la posibilidad del conocimiento científico es que este se la juega, no en los meros conceptos, sino en la estructura de estos, en su posible reflejo de la realidad, en su capacidad explicativa; también, si somos más exigentes, en su capacidad predictiva. Y todo esto no se puede conseguir si nos quedamos en los conceptos aunque, ineludiblemente, se ha de partir de ellos. Además, en el caso de las ciencias, al menos algunos de estos conceptos en muchos casos deben ser leyes y no meras definiciones, es decir, que cumplan el principio *popperiano* de su *falsibilidad*. Ya sé que Popper era un reaccionario, pero acepto la idea de Popper de que para que algo pueda ser una ley (en el campo de la ciencia) ha de poder ser falsa. Por estas razones no he entrado, Fernando, en una discusión punto por punto, porque si nos quedamos en eso tengo la sensación de tener un *deja vu* fruto de mis lecturas, una mera discusión escolástica sobre conceptos sin movernos un ápice de donde estábamos, sin ser creativos. Yo no soy un filósofo aunque lea con placer filosofía y por ello quiero pasar a mayores. No digo Fernando que tu pretendas sólo eso, simplemente quiero resaltar el campo de mis intereses e intenciones. Estas intenciones las he intentado concretar en mis

artículos recogidos en su mayor parte en *Descifrando a Sraffa*, donde no me he limitado a discutir sobre lo expuesto por el economista italiano, sino que lo que he intentado –otra cosa son los resultados– es desarrollar la teoría de Sraffa y ponerla en conexión con la de otros economistas (Keynes, Marx, Morishima, Steedman, Samuelson, etc., o con otras visiones de la economía como el marginalismo). No obstante, ahora seguiré con algún detenimiento la réplica de Fernando, pero con la misma intención: hablar de la estructura de pensamiento de Sraffa y/o de Marx y ser, en lo posible, creativo.

Pondré dos ejemplos de esta idea que expongo de cómo los conceptos e incluso leyes en el campo del conocimiento son mucho más potentes y fructíferas cuando forman parte de una estructura de pensamiento que cuando andan sueltas, autónomas y se discuten en sí mismas. En 1974 se publicaba en inglés el importante libro de Pasinetti *Growth and Income Distribution. Essays in Economic Theory*. En este libro hay un luminoso artículo sobre Keynes y su teoría de la demanda efectiva. En él recoge y concreta formalmente (matemáticamente) Pasinetti la teoría monetaria del inglés, es decir, su teoría de *la preferencia por la liquidez*. Con ello se obtiene el tipo de interés monetario en función de esa preferencia del público y de la cantidad de dinero. En sí misma la teoría ni es muy original ni quizá demasiado importante; tampoco muy profunda, pero lo que da todo su valor es cuando previamente Keynes –con Pasinetti como intérprete– relaciona este interés monetario con lo que llama –quizá no muy afortunadamente– *la eficiencia marginal del capital*, donde la función de inversión depende de una ordenación de los proyectos de inversión en función de las posibles rentabilidades internas futuras actualizadas. Esto es lo que llama Keynes *la eficiencia marginal*. Pues bien, cuando Keynes pone en conexión esta eficiencia marginal, que corresponde a lo que hoy llamaríamos economía real, con el *tipo monetario* de la preferencia por la liquidez, todo el sistema keynesiano cobra un sentido que no tienen los elementos por separado y, especialmente, su interés monetario. Ya no tiene sentido si se quiere entender a Keynes –o al menos al Keynes interpretado por Pasinetti– discutir por separado las variables reales (la eficiencia marginal) y las variables monetarias (tipo de interés), sino que sólo la conexión de ambos tipo de variables da a la *General Theory* un sentido distinto y superior a las obras de los economistas de la época, con la excepción, en mi opinión, de la de Kalecki. Aquí una mera discusión escolástica sobre conceptos nos

llevaría a subvalorar la obra de Keynes. Otro ejemplo es el de Sraffa y su *mercancía-patrón*. Con ésta y con la razón-patrón, que es su consecuencia, Sraffa resuelve uno de los problemas de Ricardo que tanto le ocupó y preocupó cual era el cómo eliminar la influencia de los precios en la medida de la distribución de la renta y en cómo obtener unos precios relativos cuyas variaciones no dependieran de la variación del precio de la mercancía que se tomara como numerario⁹⁵. Sraffa los resuelve a través de esa mercancía-virtual y obtiene una ecuación en la que se relaciona tasa de salarios, tasa de ganancia y *razón-patrón*; razón-patrón que ya no depende de ninguna variable monetaria, sino del excedente en términos físicos. Pero si Sraffa se hubiera quedado ahí sólo hubiera quedado como un epígono de Ricardo que resolvió un problema que el inglés no pudo resolverlo. Y no podía resolver como lo hace Sraffa porque entonces aún no se había descubierto el teorema de Perron-Frobenius. La paradoja es que Sraffa no hace explícito el teorema y cree equivalentes conceptualmente la razón-patrón y la tasa máxima de ganancia en al reproducción simple, pero esto es otra cuestión. Lo que sí importa es que toda la teoría de la reproducción simple cobra un sentido, una originalidad y se obtienen unas conclusiones impensables e imposibles sin esa razón-patrón. Es decir, lo que por sí sólo parecía una simple aportación a la historia del pensamiento, ahora permite que el modelo esrafiano sea –al menos en mi opinión- el mejor candidato para unos nuevos fundamentos de la teoría económica. Y más aún, cuando se pasa de la reproducción simple a la conjunta, aún podemos seguir con un nuevo concepto cual es el de *la tasa máxima de ganancia*, que es el equivalente a la razón-patrón de la reproducción simple, y que le sirve ésta de guía y modelo para aquélla. Aislada, la razón-patrón, discutida en sus aspectos conceptuales, parece una anécdota; puesta en conexión con la teoría del excedente y el resto de los epígrafes del libro de *Producción de mercancías por medio de mercancías*, hace de éste unos de los libros más importantes de la historia del pensamiento económico. Bueno, al menos esa es mi opinión que no pido que sea compartida. Cosa parecida se me hace la teoría de la explotación de Marx, pero no paso a discutirlo por no alargar demasiado esta parte del artículo.

⁹⁵ Para ser justos habría que decir que en Ricardo está mas presente el segundo problema que el primero, mientras que en Sraffa prima el primero. Así, Ricardo le dedica un epígrafe (“Sobre una medida invariable del valor”, sección VI, *Principios de Economía y Tributación*); Sraffa (“Producción con un excedente”, capítulo II, *Producción de mercancías por medio de mercancías*).

Cuando Fernando critica la teoría del valor de Sraffa es verdad que parte con acierto de un texto de Pasinetti y otro del propio Sraffa, con los que no puedo estar más de acuerdo porque esa la intención y logro del italiano: hacer una crítica demoledora del marginalismo de la época. Y yo me atrevería a decir que más de Marshall que de Walras por sus dos artículos de 1925 y 1926. Sin embargo Fernando tú criticas a Sraffa en su concepción de las categorías con las que trabaja basada en una cita de Kurz y de ningún texto de Sraffa. Yo no puedo estar más en desacuerdo con la cita de Kurz sobre esa supuesta transformación de “un punto de vista objetivos a subjetivo”, porque precisamente si algo peca Sraffa es de la falta de relaciones subjetivas en su teoría del excedente. Sraffa trabaja con tres tipos variables físicas (medios, productos e inputs de trabajo) y tres tipos de variables monetarias (precios, tasa de salarios y tasa de ganancia). En Sraffa no hay nada de relaciones sociales de producción, ni teoría de la demanda, ni nada que implique ningún sacrificio, nada de una teoría subjetiva del valor, nada basado en la teoría de la escasez. Tengo una gran admiración por el economista austríaco y he leído con placer su importante trabajo *Theory of Production*, además de otros artículos, pero el texto que mencionas no caracteriza la visión de Sraffa de la economía. Este es el peligro de las citas, de trabajar sólo con conceptos fuera del resto de las piezas del puzzle de la estructura de pensamiento que constituye una teoría. Y nada tiene que ver Sraffa con Stanley-Jevons, uno de los creadores de la teoría del valor subjetiva basada en la utilidad (junto con Menger y Walras y otros autores quizá menos importantes). En el texto más importante de Jevons dice este economista que “*la reiterada reflexión y la investigación me han conducido a la en cierto modo novedosa opinión de que el valor depende enteramente de la utilidad*”⁹⁶. Luego aclara lo que entiende el autor por utilidad, cita a Senior y dice que “*la utilidad no denota ninguna cualidad intrínseca en las cosas que llamamos útiles. Simplemente expresa sus relaciones con dolores y placeres de la humanidad*”⁹⁷. ¿Cómo puedes entender Fernando que esta concepción tenga algo que ver con Sraffa? No lo entiendo. Sí es verdad que los aspectos matemáticos de la teoría de Sraffa tienen fuertes relaciones con Von Neumann y con Leontief, aunque menos con Morishima, que podemos calificarle de marxista no ortodoxo. Pero creo que mezclas dos temas diferentes que luego

⁹⁶ *La Teoría de la Economía Política*, edit. Pirámide, 1998, pág. 67 (*The Theory of Political Economy*, 1871).

⁹⁷ Misma obra, pág. 97.

repites. Para estudiar estos aspectos matemáticos hay que separar los aspectos formales, la necesidad de la formalización de la teoría de cada uno de estos autores, con el supuesto hecho histórico de que se haya dado eso que tú llamas “predominio del pensar matemático de las relaciones económicas”. Son dos cosas absolutamente diferentes. En Sraffa tenemos que ver la necesidad o no de la formalización de su teoría, los aspectos formales de su ontogénesis y dejar como curiosidad histórica -si es que se ha dado- ese predominio del que hablas. Mi impresión es que ni siquiera esta afirmación tuya es cierta, pero como lo considero absolutamente anecdótica para el fin que nos ocupa –o al menos que me ocupa a mí– no entro a discutirlo. El que estos autores y otros utilizan con profusión o no el instrumento matemático no añade ni quita poder explicativo ni acierto a sus teorías. La cuestión es valorar en qué explicaciones –aunque no lleguen a la categoría de teorías como es el caso de Leontief y Von Neumann- es imprescindible el uso de ese instrumental, de la misma manera que en otros, como Ricardo, Marx o Keynes, lo son menos. Si lees –o quizá lo hayas leído– el libro de Kurz *Theory of Production* verás que parece un mero tratado de matemáticas. La verdad es que es útil para precisar si en el camino que va de las hipótesis a las conclusiones no hay yerro, pero no aporta ni lo pretende nada al *corpus* de conocimientos de la teoría económica. No es un libro propiamente de teoría económica sino de aclaración de las teorías de la producción, de divulgación. Riguroso y nada más. No pasará a la historia de las aportaciones de la historia del análisis económico. Muy distinto es el caso de Sraffa, con su mercancía-patrón, con su razón-patrón, con su visión del excedente, de la diferenciación entre bienes básicos y no básicos, su teoría del capital fijo, de los desplazamientos de los métodos de producción, de su visión del capital como trabajo fechado, de la renta de la tierra, del capital conjunto, con las mercancías que se auto-reproducen, por enumerar las más importantes contribuciones del italiano. Estas cosas de Sraffa sí son aportaciones a la historia del análisis económico. No es que sean problemáticas inventadas por él, sino lo que aporta son visiones y soluciones que tienen en algunos casos originalidad suficiente como para ocupar un lugar en esa historia. El problema de parte de la teoría o ciencia económica actuales –soy generoso y lo califico de ciencia aunque sea provisionalmente– es que está equivocada, no que sea expresada mediante un instrumental matemático. Es más, la gran ventaja de utilizar la matemática –los teoremas del punto fijo, por ejemplo– en las teorías del equilibrio general es que ha puesto en

evidencia la necesidad de hipótesis para llegar a vectores de precios de equilibrio que nada tienen que ver con el mundo real, porque en este mundo se dan cosas que no están en el modelo como son: ausencia de competencia en todos los mercados, existencia de rendimientos crecientes, existencia de bienes públicos, información asimétrica, efectos externos, etc. Gracias a las matemáticas podemos comprobar el inmenso error *smithiano* de considerar que *buscando el interés particular se consigue el general*. Es verdad que si echamos un repaso a la lista de premios Nobeles veremos que la mayor parte de estos se han otorgado por supuestos merecimientos de formalizaciones matemáticas más que por contribuciones teóricas al campo del análisis, empezando por el primer premiado (Tinbergen, econométra). El mismo Samuelson era más un matemático que un economista. Y así nos va, es decir, desde hace 40 años apenas hay aportaciones al campo de la teoría económica relevantes (quizá con la posible excepción de *la teoría de los juegos*). Tal es así que aún se sigue citando directamente a Keynes. Pero eso es un problema que nada tiene que ver con la necesidad de que para entender algunos autores y teorías sea necesario el uso del instrumental (matemático) adecuado. En el caso de Sraffa es ineludible porque en su concepción del valor, por ejemplo, tiene en cuenta, no sólo las variables directas implicadas (los llamados costes, costes totales, marginales, medios, etc. del marginalismo), sino las diversas proporciones entre medios de producción y trabajo de todos los sectores que, trasladados hacia atrás en el tiempo, determinan el valor presente de los bienes y servicios. Y estas relaciones intersectoriales sólo pueden ser expresadas mediante el álgebra matricial. Esta necesidad ya está presente o se deduce de sus artículos de 1925 y 1926. En Walras, en cambio, utiliza funciones de producción y de demanda continuas que exigen el uso del cálculo diferencial, porque su visión económica se realiza a partir de mercados donde se confrontan ofertas con demandas (su famoso *tattonement*) que así lo exigen. A cada necesidad su instrumento. Y si los marxistas quieren desarrollar o simplemente estudiar a Marx, tampoco se libran, como es el caso de Morishima (*Marx's Economics*). Marx también trabaja en su teoría de la reproducción y acumulación con sectores interdependientes, aunque al reducir la economía a dos o tres sectores como máximo, las matemáticas implicadas parecen más fáciles, incluso parecen inexistentes. Por ejemplo, para *arreglar* en lo posible su transformación de valores a precios hay que trabajar con cadenas de Markov. Es verdad que en esas relaciones interdependientes están

presentes las clases sociales y el papel que juegan tanto por el lado de la producción como del consumo, pero el instrumental necesario es el mismo: el álgebra matricial, el mismo que el de Sraffa, Leontief o Von Neumann. En *Descifrando a Sraffa* tienes un capítulo dedicado a la teoría de la reproducción y acumulación de Marx con bases *esraffianas*, por lo que no sigo con el tema.

Citas a un autor que no he leído como es Arum Bose. Si puedo me haré con el libro. Sin embargo esta cita no puede ser más desafortunada porque dice este autor que le impresionó la convicción en Sraffa de “*que era perfectamente posible transformar una teoría de la economía política en una ciencia exacta basada en una precisión absoluta de conceptos*”. La cita es más larga, pero esta es la parte que más me llama la atención. Nada más lejos de la intención de Sraffa. Es todo lo contrario, porque en el estudio del excedente Sraffa introduce ese grado de libertad entre tasa de salarios y de ganancias donde un mundo de realidades diferentes caben. Eso sí, acotadas, dentro de un excedente invariable que depende sólo de las variables físicas del modelo (medios de producción y productos finales). No dudo de que este autor haya leído a Sraffa, pero no parece haberle entendido en absoluto. Y lo de seguir llamando a las matemáticas (en general) ciencias exactas en 1975 con lo que ha llovido es un error absoluto o un desconocimiento más absoluto de la historia de esta forma de conocimiento. Pensemos en la topología, en la lógica borrosa, en la creación de la econometría inspirada en la teoría de la medición de los *errores* de Gauss; pensemos en la aritmetización de la geometría que comienza con Arquímedes, sigue con la invención del cálculo diferencial por Newton y Leibniz y acaba con las consideraciones de límites, derivadas e integrales con *deltas* y *epsilones* de Cauchy y Weierstrass en el siglo XIX. Pues menudo disgusto se llevaron los pitagóricos cuando descubrieron que el lado de un triángulo es *incommensurable* con la hipotenusa, de que no había dos números naturales que pudieran expresar *exactamente* la longitud de la hipotenusa. Pensemos en los esfuerzos de construir una matemática sobre bases lógicas de G. Frege y B. Russell. Las matemáticas son dos cosas: un lenguaje y un conjunto de relaciones lógicas entre entes abstractos⁹⁸. La precisión o no viene de un acto particular y concreto que es el de medir algo. Sólo era exacta la geometría euclidiana

⁹⁸ Recomiendo la lectura de *Fundamentos y enigmas en la matemática (de Kant a Frege)*, de Javier de Lorenzo, edit. Universidad de Valladolid, 2010.

precisamente porque no medía, sino que establecía relaciones entre lados, segmentos y curvas de figuras geométricas abstractas. Para los griegos era una ciencia. Nada más lejos de la intención de Sraffa de convertir su teoría del excedente en una ciencia exacta. Si Sraffa leyera este texto se sonreiría malévolamente y pensaría que sus esfuerzos por desarrollar su libro *Producción de mercancías por medio de mercancías* a base de meros razonamientos económicos había sido baldío. Creo que la cosa no merece más comentario. La ciencia, las teorías científicas, no son exactas o inexactas sino acertadas o no.

En lo que estamos de acuerdo y ya lo hemos discutido es que Sraffa presenta una terrible oquedad en su teoría: no aparecen por ningún lado las relaciones sociales implicadas. Por eso Sraffa es distinto de Marx, y por eso yo defiendo que son complementarios y no sustitutivos en aspectos importantes; en cambio en otros son incompatibles, como es el caso de la teoría de los precios. Y tienes razón Fernando, Sraffa “se desentiende de analizar el capital desde esta relación de producción”. Por eso lo de Sraffa no es una teoría o un modelo más alternativo, sino que es una alternativa a los fundamentos de otras posibles teorías o modelos y sólo a los fundamentos. Eso es lo que yo defiendo. Discrepo contigo en el propósito de Sraffa: el italiano se propuso una crítica al marginalismo fundamentalmente. Pero no podemos ser creativos a base de analizar propósitos ajenos. Es posible que la consecuencia del esquema de pensamiento de Sraffa suponga también una crítica a la teoría de los precios de Marx. Da igual el propósito; no juzguemos intenciones. La realidad es que ambas teorías de los precios son incompatibles. Y, además, la teoría de Marx es incoherente e irrelevante. Nada tiene que ver con la realidad. Es verdad que la de Sraffa tal como está en *Producción de...* también presenta problemas. Ya he abordado este tema en *Descifrando a Sraffa* y por eso digo que no hay que quedarse con lo que Sraffa dejó, sino que hay que avanzar. Mi opinión es que hay que hacerlo desde la teoría del excedente del italiano, pero no hay que pararse, no quedarse en un perfeccionamiento de lo que él dejó, de sus defectos, de sus errores, de sus insuficiencias, pero para la mí es la base más sólida que conozco. Estoy de acuerdo con la cita de G. Lunghini, por eso defino la economía de Sraffa como *el estudio del excedente y de sus límites*. Ves que no hablo de distribución porque, estrictamente hablando, tampoco tiene una teoría de la distribución. Tú criticas mi aseveración de que Marx sí intentó una ciencia social con el mismo status que las ciencias

naturales. Es mi impresión de la lectura de Marx y de algunos textos de Engels, pero si tú, que eres un experto en el alemán, lo niegas, pues yo retiro esa aseveración porque, al igual que antes, lo que importan son los resultados y no las intenciones, y lo escrito por Marx no ha conseguido ese mismo status por otros motivos, fueran cuales fueran sus intenciones. Dices también que es injusta mi crítica de que no se puede meter la cuña de la creación en Marx. Vale, te concedo el beneficio de la duda y te propongo que lo intentes tal y como yo he lo he intentado –ya digo que otra cosa es el resultado– con Sraffa. En cambio sigo discrepando en lo de que abstraer y matematizar con rigurosidad elimine la economía “como ciencia socio-histórica”. Me parece un profundo error por tu parte esta visión que tienes de Sraffa y de la forma de extraer un conocimiento de la realidad, pero tampoco quiero entrar en discusiones gnoseológicas y/o epistemológicas que nos apartarían –al menos a mí– de mis intenciones. Yo no digo que “una matriz de datos sea la realidad”, eso es una barbaridad y si lo he dicho o se puede interpretar de mis textos algo así, lo retiro. Ni siquiera me molesto en revisarlos por no perder un minuto en ello. En este aspecto no invento nada. Parto de la visión kantiana, de esa diferenciación entre el fenómeno y el noúmeno, esa visión producto de superar a la vez el racionalismo continental y el empirismo de Hume y su imposibilidad del conocimiento científico, de ese despertar de Kant del sueño dogmático⁹⁹. A partir de ahí debemos trabajar con teorías explicativas con un cierto grado de abstracción que luego sean concretadas en modelos formalizables, para más tarde poder contrastar esas teorías por medio de esos modelos que puedan tomar los datos de la realidad. Porque en algún momento hay que tomar datos del mundo real, aunque sea la realidad tamizada, teniendo siempre presente la diferenciación kantiana¹⁰⁰, aunque, como dice Gilles Deleuze, “*es preciso que el dato de la experiencia se someta a principios del mismo tipo que los principios subjetivos que rigen nuestro discurrir*”¹⁰¹. En algún momento deben aparecer los datos, esos datos “cocinados” para hacerlos inteligibles al intelecto y digeribles por “el modelo”. No nos

⁹⁹ Recomendable el libro de Justus Harnack *La teoría del conocimiento de Kant*, edit. Cátedra, 2010. También el más clásico de Ernst Cassirer *Kant, vida y doctrina*, FCE, 1993.

¹⁰⁰ Sintetiza la Harnack en la obra de antes mencionada referido a los juicios sintéticos a priori (los que posibilitan el conocimiento según Kant) que, “aunque la experiencia sensible es una condición necesaria del conocimiento, no es una condición suficiente”.

¹⁰¹ *La Filosofía Crítica de Kant*, pág. 29, 2007, edit. Cátedra.

queda otra si somos economistas y no sólo filósofos de la ciencia. La economía debe aspirar a explicar aspectos de la realidad económica y, a ser posible, hacer predicciones. Verás que no soy nada original. Con sólo Sraffa nada de esto se puede hacer porque su modelo no es lo suficientemente concreto ni abarcador del mundo económico real como para poder explicarlo (por ejemplo, las crisis económicas, los ciclos). De ahí la necesidad de desarrollar a Sraffa; también de complementarlo con Keynes, Marx, Ricardo, Kalecki, etc. De complementarlo con lo que es posible y no de cualquier forma, sino de forma estructurada. Para nada “el capitalismo se evapora con instrumentos, agregados y desagregados”, sino que esta utilización de los datos de la realidad es lo que permite la contrastación de nuestras teorías, de sus capacidades explicativas, verificativas, predictivas. Si eso no se puede hacer, habremos fracasado como economistas aunque hayamos triunfado como filósofos. El capitalismo sigue estando ahí y los modelos de Marx y de Sraffa –o sus teorías si somos más abstractos– pueden permitir mejor conocerlo, analizarlo, sacar conclusiones para pasar de la economía política a la práctica de la política económica. Las ecuaciones y gráficos nos ayudan a comprender la explicación literaria de las teorías, pero no las sustituyen. No tengas ningún miedo en ello. Si se puede hacer, hay que hacer lo de Joan Robinson: explicar las teorías sin ningún gráfico, sin ecuaciones. En cuanto a estas ecuaciones a veces son imprescindibles para avanzar en la cadena de razonamientos económicos sin errar, para poner en evidencia las hipótesis de las que partimos, para precisarlas. Sin matemáticas no se puede explicar ni entender a Sraffa. Eso lo he comprobado a lo largo de varios años de estudio del libro de Sraffa y sus conexiones. Citas a Keynes que es el autor de un gran pastiche que es la *General Theory*. Tengo el libro del inglés lleno de subrayados y escritos al margen. Es el libro que más me ha costado leer y entender, suponiendo que lo haya conseguido. Keynes no era precisamente un estudioso de la historia del análisis económico, a diferencia de Sraffa, que era un sabio, pero el inglés era un tipo más listo que el diablo. Si se compara el libro de Keynes con el de Kalecki sobre la dinámica económica¹⁰² se puede comprobar la diferencia entre un especulador (tanto de bolsa como, digamos, intelectual) y un economista profesional, pero Keynes tenía una gran intuición y acertó en buena parte de sus análisis. Y sin embargo tuvieron que ser autores como Kahn los que pusieran en claro

¹⁰² *Teoría de la Dinámica Económica*, FCE,

su libro para hacerlo inteligible, es decir, cuando fue formalizado, aunque fuera mínimamente, con meras ecuaciones de primer grado, se hizo comprensible y con una virtud que carecía el estado de conocimiento pre-keynesiano: daba pautas concretas de política económica; permitía también contrastar algunas hipótesis; incluso hacer predicciones, sobre todo si al multiplicador se le añadía lo que después vino con el nombre de *acelerador* (que está ya en Kalecki). Lo de las variables independientes que tú recoges es tan elemental, un comentario tan trivial, que casi no merece comentario. Una ecuación determina una relación lógica entre variables a la vez que elimina un grado de libertad; no establece relaciones causa y efecto o fijaciones sobre variables dependientes o independientes. Fíjate el caso de la econometría. Yo he estudiado econometría y nunca he hecho caso a esta disciplina, precisamente porque sólo puede establecer correlaciones entre variables, nunca relaciones de causa y efecto. Y por si fuera poco, si las variables independientes están correlacionadas, los estimadores tienes tales intervalos de confianza que hacen inútiles estas medidas. Es un instrumento más que, usado a veces inteligentemente, puede resultar útil.

En lo referente al capital como trabajo fechado creo que la cosa queda clara si se distingue entre *qué* es el capital en Sraffa y de *cómo* se mide. La reducción de capital a trabajo fechado es su medición, su equivalencia. Y sí podemos afirmar que el capital de Sraffa son los medios de producción, algo que casa con la tradición clásica. No hay que buscarle a ello tres pies al gato. Y volvemos a lo mismo: Sraffa no es Marx y no atribuye al capital una relación social como hace Marx, es a-histórico, su objetivo es el excedente y este es posible en todo de sociedad, en cualquiera de los modos de producción teorizados por Marx. Todo eso es cierto, por eso Sraffa es distinto de Marx. Sraffa no analiza ni medita como hace Marx cuando dice que “*los valores de los medios de producción absorbidos reaparecen en el producto como partes integrantes de su valor... Por tanto, el valor de los medios de producción se conserva al transferirse al producto*”¹⁰³. Son multitud de citas sobre las consideraciones de Marx sobre eso que llama el capital, aunque en el texto –y por eso lo traigo a colación– habla de medios de producción. Nada de esto hay en Sraffa. Para él los medios de producción es lo que cualquier no economista puede entender: son los

¹⁰³ El Capital, vol. I, pág, 150, edit. FCE, 1974.

instrumentos (materias primas, maquinaria, instalaciones, etc.) que sirven para producir. Sólo eso. Además es un dato, lo toma de la realidad (de la realidad tamizada) y lo emplea en su modelo. Hay una excepción: cuando analiza los desplazamientos de los métodos de producción (hoy, elección de técnicas). No merece la pena darle más vueltas al asunto. ¿Es un defecto, un vacío? Sí, probablemente lo sea, pero Sraffa no es Marx y lo que no sabemos es que hubiera escrito Sraffa si Marx no hubiera existido, pero es lo que hay. Lo que discrepo contigo es que el capital en Marx sea *sólo* una relación social. El texto mencionado habla también de “*medios de producción*”, pero es verdad que lo *sui generis* de Marx es esa transmutación de los aspectos físicos de –en este caso– el capital en una relación social. Por ello creo que no es incompatible, por ejemplo, integrar en un modelo a Marx y Sraffa, asimilando el capital como medios de producción del primero con los del segundo, sin desvirtuar la visión marxiana de la relación social. Supongo que tú ahí no estás de acuerdo y ahí, claramente, discrepamos. Termino este punto diciendo que puedes estar tranquilo, que la medición del capital de Sraffa (los medios de producción) no “volatizan el concepto del capital” de Marx porque, insisto, hay que considerar la reducción del capital en Sraffa *sólo* como *la medición* del capital y no como la transmutación de su esencia.

Tú defiendes –con Marx– que la economía es una ciencia “socio-histórica”. Yo, que soy historicista, estoy de acuerdo contigo, y para nada menoscaba eso la aportación de Sraffa esta visión. Es verdad que la manera de entender y desarrollar la teoría del excedente en su libro básico no es histórica, es decir, le falta la coordenada temporal. Este excedente vale, por tanto y dicho en términos marxistas, para los diferentes *modos de producción*, porque en Sraffa hay un grado de libertad en el reparto de salarios y ganancias. Sraffa no pretende más, no le estiremos de donde no hay posibilidad. Insisto que sigues contemplando como defecto en Sraffa que no tenga la misma concepción que Marx en este aspecto como en otros. De serlo, Sraffa sería un duplicado de Marx, es decir, no hubiera aportado nada a la historia del análisis económico. Los marxistas no os dais cuenta a veces de que al sacar a Marx de la historia del pensamiento económico convertís su obra en un catecismo. Supongo que no estás de acuerdo, pero es la impresión que tengo de ello. Me alegra que menciones a Toynbee porque he disfrutado cuando era joven con su *Compendio del Estudio de la Historia*. Digo *compendio* porque es a lo que tuve acceso

en España en la edición de Alianza Editorial en tres tomos. Es una visión muy distinta de la marxista, porque en Toynbee las diferentes sociedades que en el mundo han sido según su visión taxonómica tienen su nacimiento, desarrollo, esplendor y caída como si fueran organismos biológicos o especies biológicas. Toynbee facilita el estudio de los casi infinitos hechos históricos en un modelo de evolución de la historia. Aunque no estés de acuerdo con el gran historiador inglés, hace lo mismo que Marx al convertir la historia en un modelo de evolución de diferentes modos de producción. Son modelos absolutamente distintos, pero son modelos. Marx no es distinto de los demás en ese aspecto porque nadie ha escrito ni en lo social ni en las ciencias físicas el libro definitivo, todos son modelos, teorías, porque es la forma que tiene el intelecto de acercarse a eso tan inabordable que es la realidad. Por cierto, ambos serían compatibles con Sraffa porque en ambos hay excedentes que se crean, se reproducen y que ha de repartirse. Fíjate que hasta en las ciencias físicas se habla del “modelo estándar”, de “la teoría de la relatividad”, “de la teoría de las cuerdas”, “de la interpretación de Copenhague”. También para los físicos la realidad es inabordable. Los físicos no saben de qué está hecha la realidad, qué es la materia, a pesar de que comenzara con buen pie ese conocimiento (el atomismo de Demócrito). Sólo conocen sus manifestaciones. De alguna manera están presos en el diseño kantiano.

Hablas de economistas “científicos”. Claro, si de entrada adjetivas así a alguien ya se supone que está en contra de él y de manera de acercarse al conocimiento de la materia. Yo también estoy en contra de los “científicos”, lo mismo que también lo estoy de los economistas meramente literarios que no se molestan en contrastar sus teorías, en comprobar la capacidad explicativas de las teorías, en no manejarse y enlodarse con datos tomados de la realidad, aunque sea la realidad tamizada. Yo no estoy en la posición que tú me atribuyes en esta parte. Yo soy un economista que antepongo –o eso intento– los hechos de la economía al carro de lo formal (matemático), la teoría antes que el modelo, y el modelo antes que su formalización matemática. El problema es otro muy distinto. Lo que yo sostengo es que las matemáticas son a veces un instrumento útil e –también a veces– imprescindible para obtener conclusiones sin error a partir de las hipótesis; también para contrastar las conclusiones de los análisis, de las teorías, de los modelos. Si tú estás de acuerdo con esto, pues no hay discrepancia. Yo no tengo miedo de que “al dominar una técnica

nos exponamos a ser dominados por ella”, lo que tengo miedo es a cometer errores de razonamiento por no utilizar una técnica cuando esta es imprescindible. Te pongo un ejemplo del mismo Sraffa con el fin de pasar de las meras divagaciones. Sraffa no utiliza nunca el teorema de Perron-Frobenius en su libro cuando este es imprescindible en el análisis de la producción simple. Eso le lleva a cometer el error de identificar *conceptualmente* la razón-patrón con la tasa máxima de ganancia. Lo tienes en *Descifrando a Sraffa*. También que, por falta de utilización del instrumento formal, le lleva a considerar que para que los precios sean positivos en la producción conjunta la tasa de ganancia ha de ser menor o igual que el menor de los excedentes relativos. Es un error por defecto del uso del instrumental, no por exceso, es decir, por lo contrario que tu señalas y que señala Mongiovi. Pero en la cita volvemos al error de siempre: mezclar el hecho histórico de que se haya dado una utilización inadecuada o exagerada del instrumental con la necesidad de utilizarla o no en cada caso. Walras, los austríacos, los marginalistas en general, están equivocados, no por lo sofisticado de sus instrumentos matemáticos, sino por lo errado de sus hipótesis sobre el comportamiento económico. Yo no desprecio a los que no usan las matemáticas en la economía, lo mismo que exijo que no menosprecien los que no las usan a los otros. En esto podemos juntarnos y despreciar a los despreciadores y quedar tan amigos.

Algo que para mí es anecdótico es esa crítica o duda sobre mi idea de la metafísica. No tengo ninguna en especial, ni en esto soy original. Esta palabra yo la menciono a propósito del título de tu artículo (*Sraffa y la metafísica de la economía*) y de tu crítica, pero sin querer aportar nada al respecto. Nada más alejado de mí que abordar a Sraffa desde la metafísica o algo parecido. En realidad esta palabra indicaba los libros ubicados por Aristóteles después (*meta*) de la Física como sabes y así los denominó uno de sus discípulos (Andrónico de Rodas) cuando pasó *a la estampa* -que diría Cervantes- las lecciones peripatéticas del maestro. Decía el estagirita que la metafísica estudia el *ser en cuanto ser y los accidentes propios del ser*. Yo no creo en las esencias y la visión aristotélica me queda en las antípodas de mi forma de ver las cosas, dicho sea con el máximo respeto por una de las grandes luminarias –a pesar de sus errores– de la humanidad. A pesar de eso leí con placer el estupendo libro de Ortega y Gasset *¿Qué es metafísica?* Yo, en este aspecto, de quedarme, me quedo con la idea de Kant –siempre Kant– de que “*la metafísica es la ciencia de los límites*

de la razón humana”. Nada de esencias y dejemos a Aristóteles que ocupe su lugar en la historia del pensamiento. Creo que debemos abandonar esta cuestión que no conduce a nada. Yo al menos no lo veo, aunque me quedo con la duda de qué quieres decir o porqué titulabas tu primer artículo de esa manera, porque si empleas esa palabra en un sentido aristotélico o cercano al filósofo griego, te diría que Sraffa también está en las antípodas de la metafísica, mucho más, desde luego, que Marx o Walras. Para mí lo que se llama ciencia o análisis económico es un precipitado histórico de los problemas estudiados y las soluciones que han dado intelectuales que llamamos economistas de las cuestiones referidas a la producción y distribución de bienes y servicios que tienen por objeto satisfacer las necesidades materiales de los seres humanos. No es la definición de Lionel Robbins, pero es casi el 50%. Y esto no tiene nada de “metafísico”. Y tampoco creo en catecismos –no digo por contraposición que tú lo creas-, de estructuras de pensamiento que hayan dado con la tecla definitiva. Creo que cada generación debe construir su “manual” de análisis económico. No por ello ha de caerse en un relativismo y de que esos manuales hayan de ser un compendio de los economista presentes y pasados, porque esos “manuales” deben tener una estructura interna que pueda explicar y, a ser posible predecir, esos *fenómenos* económicos o los que comúnmente consideremos como tales.

Acabo esta parte del artículo y tengo la sensación de que no hemos avanzado nada de lo dicho por Sraffa y/o Marx. Eso me pasa cuando no se pasa de los conceptos, de las definiciones, incluso de las leyes, en este caso económicas, si esas leyes sólo se examinan por separado, fuera de la estructura de pensamiento que es una teoría, y entonces la bruma del escolasticismo que viene del Medioevo me deja ciego, aunque espero que no sordo. Ya he tratado el tema anteriormente y puesto ejemplos de lo que quiero decir con ello, por lo que dejo el tema. Voy a hacerte así, a vuela pluma y de sopetón, varias preguntas, Fernando: ¿Cómo estás seguro de que la teoría de la explotación es una ley económica y no una mera definición? ¿Es una ley imposible de dar en un hipotético modo de producción no capitalista? ¿Porqué? ¿Un asalariado –o el conjunto de la clase trabajadora- que se quedara/n con la/s empresa/s y pasara/n a autónomo/s en las mismas condiciones que cuando trabajaba/n para la/s empresa/s seguiría/n generando plusvalía su trabajo? ¿Puede ser falsa la teoría de la explotación en algún momento determinado como, por ejemplo, cuando se diera una

reducción sustancial de las horas de trabajo de los asalariados de tal forma que el valor del producto de su trabajo menos los medios de producción empleados fuera igual o menor que el valor de los bienes y servicios consumidos por los trabajadores? Yo tengo mi propia opinión, pero me gustaría que tú, como ortodoxo marxista –o no tan ortodoxo, no lo sé– dieras respuesta a estas preguntas. No tengo segundas intenciones, sino simplemente porque puede ayudar a la reflexión sobre los temas que venimos tratando y sacarnos del cascarón de los conceptos.

Sobre el tema de si es posible equiparar el conocimiento que tenemos sobre los fenómenos que podemos entender como económicos con las ciencias físicas, mi posición ha ido variando con los años. En un principio creía que era posible porque partía de la idea kantiana de que las ciencias lo son por su método y no por su objeto. Ahora ya no pienso lo mismo. El método no lo es todo. Ahora pienso que si el objeto de estudio no tiene las condiciones de necesidad y universalidad de los fenómenos, la teoría que estudie este objeto no puede ser equiparable a las ciencias físicas o, en general, llamadas naturales, aunque quizá este nombre ha perdido vigencia. Creo, para empezar, que la economía sólo puede ser una rama de la sociología; pienso además que el objeto de estudio -que es al fin y al cabo el comportamiento humano, aunque sea el limitado a la satisfacción de sus necesidades materiales- no tiene la regularidad necesaria aunque tampoco sea caprichoso. Este hecho ya lo ha observado Samuelson al criticar todas –o casi todas- las supuestas “leyes económicas” que han surgido como las setas en la última mitad del siglo XX. El comportamiento humano no es determinístico ni aleatorio. Y este sí es un problema para las matemáticas, para el instrumento. De esto no hemos hablado y, curiosamente, sería un punto a tu favor, Fernando, en tu crítica del uso de las matemáticas en la economía. A mí no me importa traerlo a colación porque yo no tengo ningún interés en tener la razón de mi parte por un prurito de orgullo; apuesto a que tú tampoco. Sin embargo esta reflexión apuntala mi punto de vista sobre Sraffa como candidato para esos nuevos fundamentos de la economía que yo defiendo, porque ese grado de libertad entre salarios y ganancias que el italiano nos regala se me hace que al menos puede compensar el determinismo del instrumento (las matemáticas). Es verdad que *la teoría de los juegos* ya parece otra cosa distinta de los modelos determinísticos basados en funciones y/o ecuaciones, y distinto de los

modelos probabilísticos que surgieron históricamente de la teoría de los errores de Gauss, y que alimentan la econometría cuando se le añade a esta la relación entre la muestra obtenida y la población supuestamente observada. Pero los modelos probabilísticos no dejan de ser también determinísticos en la acotación de los intervalos de confianza. Y a ello hay que añadir algo que se comenta en otra parte del artículo: que la relación causa y efecto la pone el economista y no puede deducirse del modelo. Pero es lo que ahí y con ello se ha de tirar, porque no podemos renunciar a contrastar las teorías, a tomar datos de la realidad, esa realidad tamizada por la crítica kantiana. Remedando a Kant, que decía que *los pensamientos sin contenido son vacíos y las intuiciones sin conceptos son ciegos*, yo apuesto por decir -con la modestia de un simple mortal que soy- que en el campo de la economía al menos, la teoría sin la realidad es mera definición y que la realidad, aunque sea la tamizada, sin teoría es sólo estadística.

En mi trabajo *Sraffa: lógica económica y matemáticas*, he abordado la cuestión de la relación entre economía y matemáticas. Creo que Fernando que te lo he mandado, pero traigo aquí la introducción porque viene *como de molde*, que diría el genial manco, para la discusión entre la economía y el uso de las matemáticas. Yo creía que ese debate ya había caducado pero, en vista de tu insistencia, quizá no sea así en Argentina y/o en otras partes. Yo en España no percibo que eso esté en cuestión, pero es posible que no tenga las antenas pertinentes para captarlo. Quizá ya lo hayas leído, pero quizá sea útil para los lectores, que es lo que nos importa. Dice así la introducción...:

... La manera de afrontar Piero Sraffa la parte matemática de su obra *Producción de mercancías por medio de mercancías* merecería una introducción general sobre el papel de las matemáticas en las ciencias sociales o, al menos, en el subconjunto de ese conocimiento que es la Economía. Pero eso daría para mucho y mucha extensión y esa no es la intención. Pero al menos hay algún aspecto que no se puede obviar. Nadie discute la importancia de las matemáticas en las ciencias físicas o, como se las llamaba en tiempos de Galileo y Newton, filosofía natural (*Principios de filosofía natural*, Newton; *Diálogo de las dos Ciencias*, Galileo). En cambio, a veces se pone en entredicho la oportunidad o no de la mal llamada *Ciencias Exactas* en España -hasta hace poco- en la construcción de las ciencias sociales. Descarto las razones interesadas derivadas de los

que no quieren o no saben matemáticas y sólo buscan justificarse. Decía lo de lo inoportuno e inexacto –valga la paradoja- de llamar ciencias exactas a las matemáticas porque estas no son una ciencia, aunque lo fuera para los griegos de los tiempos de Euclides y a pesar del uso de principios físicos en Arquímedes para determinadas demostraciones geométricas (por ejemplo, principio de la palanca para el cálculo de los volúmenes). Lo de exacto¹⁰⁴ lo dejo porque se aparta del tema demasiado. En general, las matemáticas son dos cosas a la vez y complementarias: un conjunto de construcciones lógicas y un lenguaje. No se pretende reducir las matemáticas sólo a la lógica porque eso lo han intentado grandes mentes como G. Frege y B. Russell y fracasaron; además los teoremas de incompletitud de Gödel sirven indirectamente para asentar como errónea tal pretensión. Pero tampoco se puede obviar a Frege y a Russell porque sus intentos de fundamentar las matemática sobre bases lógicas no han sido estériles. Reducidas a su función en cualquier forma de conocimiento las matemáticas pueden servir o no para acompañar aquél si ese conocimiento cumple tres principios o requisitos: 1) si puede reducirse a conjunto de entes abstractos que interrelacionan y que llamamos modelos; 2) si al menos parte de esas interrelaciones lo son de causa y efecto; 3) si se cumplen los principios de universalidad y necesidad de la Ciencia. Por ejemplo, ni en la Psicología, ni en la Historia –salvo datos históricos-, ni en la Ética, ni en la Estética, no parece que tenga que decir nada las matemáticas. En todas ellas fallan algunos de los tres principios anteriores o los tres. Así, en la Psicología y en la Historia sería útil el segundo principio (relaciones de causas y efecto), pero no el primero (reducción a entes abstractos); en la Estética ninguno de los dos, salvo una posible Historia de las ideas estéticas y en la Ética aún menos, porque esta materia no nos habla de lo que pasa sino de lo que debiera pasar (de cómo debemos comportarnos). Las ciencias sociales como la sociología o la economía parecen cumplir el segundo principio, a regañadientes el primero, pero con enormes dificultades el tercero, es decir, el principio de universalidad y necesidad. Así, en Física la ley de la gravedad es universal porque afecta a todos los entes que tienen masa y porque es

¹⁰⁴ También por la enorme ambigüedad que entraña la palabra exacto, y más aún aplicada a las Matemáticas, aunque pueda parecer lo contrario y paradójico. Por ejemplo, en la geometría euclidiana lo que parece entenderse como exacto –las figuras geométricas, sus propiedades, sus teoremas- no se define por su exactitud sino por su certeza o acierto lógico; en cambio, todo el desarrollo del cálculo infinitesimal desde Arquímedes se basa precisamente en la posibilidad de acotar la imprecisión, precisamente porque lo que entra en juego es *la medición* y no sólo la lógica. Recordemos, por ejemplo, que para B. Russell no existen los número reales, sino, en todo caso, aceptaba el lógico inglés que había sucesiones de números racionales que no tenían su límite en su mismo campo.

inevitable su acción cuando hay dos masas (los *graves* de Newton) en presencia. Además esa acción se extiende de forma ilimitada. Otro ejemplo es el de la relatividad, donde su segundo principio (el primero es el principio galileano de relatividad del movimiento según el marco de referencia) es el de la constancia de la velocidad de la luz. En el electromagnetismo la idea de acción por medio del *campo* eléctrico descubierto -¿o creado?- por Faraday y matematizado por Maxwell resulta insoslayable, necesario y universal. En Economía, *prima facie*, no parece que se hayan descubiertos leyes que podamos asegurar su universalidad, incluso su necesidad. Adam Smith creyó encontrar un principio de egoísmo (buscando el interés particular se consigue el general), pero no está tan claro, porque no es universal (se enfrenta a él el altruismo) y porque menos seguro es -yo creo que está absolutamente equivocado- su consecuencia, es decir, que se consiga con ello el interés general, como estamos viendo, por ejemplo, en la crisis actual, donde el egoísmo de los especuladores del ladrillo antes y de los llamados “mercados financieros” ahora nos han llevado a la crisis y a la recesión. Otra ley curiosa es la de Gresham (la moneda mala desplaza a la buena), que quizá no tenga mucha importancia pero que parece universal. Aunque no recuerdo el texto, Samuelson ha hecho un recuento de las supuestas leyes de la economía que pretendían su universalidad y han fallado unas tras otras. Pero el problema en la economía no es tanto encontrar esos principios o leyes universales y necesarias a partir de la psicología de los actores económicos sino que la mayor dificultad es la necesidad de ese reduccionismo para cumplir el primero de los principios, es decir, para llegar a modelizar e introducir con ello la cuchara de las matemáticas. La razón de ello es que son muchos los factores que intervienen en las decisiones de los individuos en el subconjunto de decisiones que podemos entender como económicas. Este es el gran problema de la econometría, donde el conjunto de las variable exógenas que intentan recoger precisamente las causas se estorban entre sí y dan lugar a malos estimadores, con intervalos de confianza demasiado amplios y sin que podamos valorar con seguridad el peso de cada variable en el efecto. Y el problema es que si no conseguimos meter esa cuchara de encadenamientos lógicos a partir de la realidad -o sus epifenómenos- corremos el serio peligro de equivocarnos en las conclusiones o de llegar sólo a la trivial conclusión (como ocurre en la teoría del equilibrio general) de que *todo depende de todo*. Sraffa, que era un genio, es para lo bueno y lo malo, un ejemplo, y ello no impidió que diera a la luz uno de los dos o tres textos más importantes de la historia del análisis económico.

Pensemos ahora lo que significa una ecuación y veamos las posibilidades que no da como descripción de una realidad y de supuestos de comportamiento. Una ecuación –y si se quiere, una función– lo que recoge es un conjunto de entes abstractos que llamamos variables, cuyos valores pueden tomar toda una infinidad de valores –salvo que los acotemos *ad hoc*–, pero con una excepción: que debemos rebajar esa infinidad en un grado que viene dado por el signo de la igualdad. Por ello, lo que determina la importancia de la ecuación no son los infinitos valores que pueden recoger las finitas variables, sino los conceptos que encierran o quieren representar de la realidad esas variables. Si tomamos una ecuación o función que pretenda ser representativa de la realidad, debería tomarse una ingente cantidad de variables en el ámbito de las *supuestas* ciencias sociales para representar esa realidad. Esta es la primera dificultad; la segunda es que se debe arriesgar la forma funcional de estas relaciones entre variables. En un sistema de ecuaciones ambas cosas se trastocan. Por un lado podemos poner sobre la mesa una cantidad casi ilimitada de valores de esas variables, lo cual añade una riqueza de *pixeles* descriptivos de esa realidad para formar esa fotografía borrosa nada comparable con lo que se puede hacer con el cálculo diferencial. Lo que se pierde es que, para poder trabajar con esa inmensidad de datos, estas relaciones son normalmente lineales. Estas dos últimas características es lo que recoge el álgebra matricial (o, por ejemplo, el cálculo tensorial en la matemática utilizada por la teoría de la relatividad). En las *supuestas* ciencias sociales debería renunciarse a las funciones únicas de algunas variables (tampoco pueden ser muchas), porque parece impensable que los comportamientos sociales puedan *embutirse* en una sola ecuación, por atinados que estemos eligiendo sus variables y sus relaciones funcionales. De ahí los fracasos prospectivos de la funciones de producción, (la Cobb-Douglas, por ejemplo) o de los modelos de crecimiento, tanto de la producción como los demográficos. No tengo duda de que ese retrato borroso de la realidad que puede ser el instrumento del álgebra matricial es mucho más rico y adecuado para tratar de describir someramente la realidad. Y sin embargo, la dificultad de acertar con las variables de representación son las mismas en ambos tipos de matemáticas, tanto en la del cálculo diferencial basado en la continuidad de las variables como con las matrices y su discontinuidad. No en vano uno de los grandes avances para el estudio, planificación y prospección de la economía son las tablas Input-Output de Leontief o la programación lineal aplicada en la economía soviética por Kantarovitch, y en otros aspectos por Koopmans y Dantzig.

Creo que se podría distinguir dos corrientes en el uso de las matemáticas por parte de los economistas. Una primera –primera además en el tiempo- es la aportada por Quesnay y los fisiócratas, seguida mucho más tarde por Marx, Walras, Leontief. En esta se parte del principio hegeliano de que la verdad es el todo (o en el todo está la verdad) y sus construcciones son omnicomprensivas porque intentan abarcar toda la realidad y explicarla. O al menos una fotografía borrosa de la realidad, pero de toda. La otra manera de utilizarla es como lo hacen o puede hacerse a partir de los textos de Ricardo y/o Marshall, donde las matemáticas son un instrumento para explicar ciertos fenómenos entendidos como económicos y evitar el yerro lógico. La diferencia con lo anterior es notable, porque aquí falla el principio de universalidad y se rehúye a explicar toda la realidad. La cosa se concentra, bien en el comercio (costes comparativos), en la renta de la tierra, en los mercados y/o en las empresas (Marshall, *caeteris paribus*). Por este camino se llega a *la caja de herramientas* de Joan Robinson, que es como negar la posibilidad de la ciencia en materia de lo que suele entenderse por Economía (incluso con la reduccionista definición de Lionel Robbins¹⁰⁵). La teoría dominante de la economía o, mejor dicho, tanto el objeto de estudio en las cosas entendidas por económicas como el uso del instrumental ha seguido el legado de Marshall, con la excepción del análisis de Leontief y de Walras (anterior a Marshall). ¿Y dónde queda ubicada la matemática de Sraffa? Pues aquí viene una de sus genialidades, porque Sraffa está en ambas. El italiano parte también de toda la realidad -al igual que Walras- en su capítulo I de *Producción de ...*; luego amplía al estudio de toda la realidad con excedente, a la producción conjunta, al capital fijo, al trabajo fechado, y así sigue hasta su último capítulo con los productos que se auto-reproducen (apéndice B de *Producción de...*). Pero Sraffa, influido quizá por la lógica de Ricardo, pero considerando que la prueba de la bondad de una teoría es cuando se explica el todo (a diferencia de Marshall y su análisis parcial), busca y encuentra un camino intermedio: parte de los datos de la realidad –de toda, aunque realidad borrosa- representada por $n \times n$ medios, n productos, n inputs de trabajo, una tasa de salario y una tasa de ganancia para encontrar una de las grandes abstracciones de la historia del análisis económico como es *la mercancía-patrón*. Con ello también y como subproducto *la razón-patrón*. Este es uno de los grandes atractivos de *Producción de ...*: la manera original de proceder de Sraffa en el uso de las matemáticas. No es que Sraffa tuviera tal propósito, pero es el resultado en su obra. Él puso todo su empeño en sustituir la lógica

¹⁰⁵ La economía es la ciencia que analiza el comportamiento humano como una relación entre fines dados y medios escasos que tienen usos alternativos.

matemática de su modelo por las explicaciones económicas para evitar, creo yo, reducir su teoría y su *preludio a la teoría económica* de la época a un mero modelo matemático a lo Von Neumann, por ejemplo, o a un modelo alternativo de equilibrio general análogo al de Walras, con otro instrumental matemático, pero sin más pena que gloria. Es verdad que al final Sraffa no ha pasado a los manuales, pero por otros motivos, no por falta de méritos intelectuales.

Sraffa ya explicaba en sus artículos de 1925 y 1926 –especialmente el que atañe a los rendimientos en régimen de competencia– cómo para determinar los precios “*tenemos que abordar la vieja y ya casi anticuada teoría que hace depender el valor únicamente del costo de producción*”. Y más tarde ya expresa reiteradamente en *Producción de...* la importancia que tiene en la formación de los precios, no lo que entendemos por coste de producción directo –concepto ausente en el libro–, sino las distintas proporciones entre trabajo y medios de producción y la composición y variedad de estos medios de producción; y no sólo de la empresa, industria o sector que produce el bien o servicio (mercancía en Sraffa), sino la importancia de esas proporciones de las empresas, industrias, sectores que indirectamente actúan como proveedoras de las primeras, y así sucesivamente. La economía neoclásica, perdido el horizonte de los fisiócratas, pierde a su vez estas nociones. Al menos hasta Walras, que intenta una teoría del todo con la intención buscar un ansiado equilibrio que nos lleve al mejor de los mundos posibles, utilizando métodos de optimización que intentan dibujar supuestos comportamientos socioeconómicos. El instrumento de Walras será el cálculo diferencial, que para eso era ingeniero. Pero es Alfred Marshall el que con sus *Principios de Economía* lleva el análisis económico sólo –o prácticamente– a la empresa, al mercado, al equilibrio parcial y con la cláusula *caeteris paribus* como instrumento, y la economía deja de estudiarse como un todo, tal como vislumbró Sraffa en la segunda década del siglo XX y como concluyó Joan Robinson –quizá sin darse cuenta– con *la caja de herramientas*. Sraffa, lo mismo que Von Neumann primero y Leontief después, vuelven a retomar la economía como un todo y, tanto el ruso como el italiano, no consideran necesario expresar aquélla como un proceso continuo. Ambas cosas – discontinuidad y estudio de la totalidad– abocaban al instrumento necesario para abordar sus creaciones intelectuales: el álgebra matricial. No es la primera vez que un mismo objeto se abordaba con instrumentos formales tan diferentes. Quizá el caso más relevante sea en la historia de la Ciencia el de la mecánica cuántica, con Schrödinger y Heisenberg llegando a los mismos resultados a partir, el primero con la ecuación de onda describiendo lo que pasa en el micromundo, el segundo

presentando los efectos de esa mecánica mediante matrices, pero renunciado a cualquier relato descriptivo de lo que pasa en el átomo.

Antes de entrar en el uso que hace Sraffa de las matemáticas y los problemas que abordó con ellas y –sobre todo- sin ellas, se puede decir algo de su peculiar utilización. Por supuesto que es el álgebra el instrumental casi único, quizá con dos posibles excepciones: la optimización que lleva a cabo en el capítulo correspondiente a la *reducción del capital a trabajo* fechado para calcular la fecha (el tiempo) que da el máximo beneficio y en el capítulo del *capital fijo* que emplea las matemáticas financieras para calcular la amortización (anualización) correspondiente a las mercancías pluarianuales. Lo llamativo de Sraffa es que vista su obra en su complejidad parece imposible que pudiera llegar a las conclusiones que llega en los diferentes capítulos sin emplear el famoso teorema de Perron-Frobenius en ningún momento a pesar de que lo conocía¹⁰⁶ –sabemos que lo conocía por los esfuerzos de sus amigos matemáticos Besicovitch y Ramsey para tal fin-. Parecería, en principio, que habría dos caminos para abordar la parte matemática presente en Producción de –sea explícita o implícita-: una, utilizar siempre que sea necesario el teorema y subsanar con ello las insuficiencias y/o deficiencias del texto de Sraffa; dos, completar, como lo han hecho economistas posteriores como Schefold, Kurz, Lippi, Salvadori, las pruebas sin el teorema mediante algoritmos que lleven a tal fin. Al proceder así podemos decir dos cosas: la primera que, al no emplear el teorema, Sraffa *sólo* nos puede dar o bien las condiciones *necesarias*, o bien *las suficientes*, y a veces ninguna de las; la segunda, que todas las pruebas e inventos algorítmicos que llevan a las condiciones suficientes son, en el fondo, una versión particular del teorema de Perron-Frobenius, por más alejadas que parezcan aquéllas de éste. Y no puede ser de otra forma porque el teorema es la versión para funciones discretas de los teoremas del punto fijo de Brower y de Kakutani que nos dan precisamente una solución final de equilibrio. Consciente de ello –esa es mi impresión– Sraffa suele completar *la parte suficiente* de las pruebas suponiendo comportamientos económicos que evitarían soluciones absurdas por parte de los agentes económicos (precios negativos o infinitos, por ejemplo). Un capítulo donde se puede comprobar y discutir lo anterior es el mencionado sobre la reducción del capital a trabajo fechado, donde los precios dependen de la suma capitalizada de las matrices de requerimientos que recogen los efectos directos e indirectos del trabajo en la formación de aquellos. La discusión gira –como veremos– sobre la

¹⁰⁶ Sabemos que lo conocía por los esfuerzos de su amigo matemático Besicovitch para tal fin.

convergencia o no de la serie (progresión geométrica), convergencia que depende de la productividad que recoge la matriz de requerimientos y la tasa de ganancia empleada. La ventaja de emplear algoritmos es que pueden ambos razonamientos, el matemático y el económico, ir en paralelo, *pari passu*, y permitir una mejor visualización del aspecto económico, frente a la aplicación del teorema, que no lo permite. Así, por ejemplo, cuando Sraffa emplea el “*mínimo valor posible de R*”¹⁰⁷ (de la razón-patrón) es fácil comprender que todos los precios sean positivos, puesto que la tasa de ganancia exigida es la que corresponde al excedente menor de todos los existentes (uno por mercancía). De esta manera tenemos una razón suficiente, pero en este caso no es simultáneamente condición necesaria, porque esta viene dada por el teorema de Perrón-Frobenius. Además, se puede demostrar (véase aquí el apéndice sobre las tres tasas máximas de ganancia) que, en general, la tasa máxima de ganancia, la razón-patrón y esta tasa correspondiente al menor de los excedentes no tienen por qué coincidir. En cualquier caso, estas insuficiencias o deficiencias no empeñan para nada la genial obra del turinés, que ha puesto los pilares de una nueva teoría económica, una alternativa al marginalismo y sus colaterales y derivados (teoría del capital, equilibrio general competitivo, óptimos paretianos, etc.). Para completar y subsanar sus deficiencias hay economistas y economistas-matemáticos con talento suficiente como los mencionados y otros como Pasinetti, Garegnani, Schefold, Steedman, Afriat, etc.

A pesar de todas las deficiencias anunciadas, la ventaja del proceder de Sraffa es que inaugura una nueva forma de abordar la economía y un nuevo uso del instrumental matemático. Con Adam Smith, por ejemplo, los precios vienen determinados por las sumas de las rentas de los factores (salarios, ganancias, rentas) que se determinan autónomamente; con Ricardo se determinan primero los salarios, las rentas de la tierra y el precio final, siendo las ganancias la variable dependiente a determinar que se obtiene por diferencia; en el marginalismo dependen las rentas del valor de las supuestas productividades marginales y los precios de los supuestos costes marginales; en el marxismo de su teoría del valor-trabajo, de la diferenciación entre el valor del trabajo y el valor de *la fuerza* del trabajo para pasar al problema de la transformación y llegar a los precios; en Sraffa, a diferencia de lo anterior donde todas las variables monetarias (al menos) están determinadas de una u otra manera, la relación entre salarios y ganancias queda indeterminada. Una misma ecuación como la de la reproducción simple con salarios *post-factum* $PY=wL+(1+r)PX$ (donde P es un vector de precios, Y una matriz diagonal

¹⁰⁷ Pág. 79 de *PMPM*.

de productos finales, w la tasa de salarios, L un vector de inputs de trabajo, r la tasa de ganancia y X la matriz cuadrada de medios de producción) sirve para caracterizar ¡realidades diferentes!, diferentes relaciones entre salarios y ganancias. Nada nos dice de cómo se forman los salarios y las ganancias, pero nos señala la dependencia de ambas rentas y acotan su suma, que es el excedente. El sistema *en libertad acotada* de Sraffa va a permitir estudiar el capital como trabajo fechado y/o agregado como período medio de producción (capital fijo), las mercancías que se auto-reproducen, la demanda efectiva de Keynes sobre una base sólida *esrafiiana*, la teoría de la reproducción y acumulación de Marx, lanzar una teoría del comercio internacional distinta a la de Ricardo, exponer una teoría del equilibrio distinta a la *walrasiana* y posteriores (Debreu, Arrow), una teoría de la negociación de los salarios a partir de la función frontera salario-ganancia, un esbozo de una teoría de la inflación no monetaria a partir de los efectos sobre los precios de una aumento de las tasas de ganancias cercanas a la tasa máxima, etc. Son sólo algunos ejemplos que economistas posteriores han desarrollado y que yo mismo lo he hecho en *Descifrando a Sraffa* de forma entre audaz y temeraria, pero intentando ser original. En Sraffa, a diferencia de los modelos marginalistas o marxistas, la matemática es un instrumento que por sí sólo no nos devela la realidad, no nos la explica suficientemente, pero es, cambio, un camaleón que se adapta al medio; su función es servir de basamento para nuevos modelos explicativos desarrollados de forma integrada con el/los modelos *esrafiianos*. Es verdad que esto no estaba en la intención de Sraffa ni en la de los *esrafiianos* (si es que quedan), pero esta es una posibilidad abierta y creo que extraordinariamente fructífera. No por ello se cae en una especie de relativismo, donde Sraffa sirviera para dotar de base sólida a cualquier teoría y/o escuela económica. Sraffa es, por ejemplo, incompatible con el marginalismo en general y, más en concreto, con la teoría del capital neoclásico. Teoría que se sigue explicando a pesar de su incoherencia y de su nula capacidad explicativa, pero este es otro tema. Con Sraffa -y apuesto que con Marx también- surge una visión del análisis económico donde hay que operar desde diferentes niveles de abstracción, donde se puede construir modelos de un nivel de abstracción elevado para y concretando otros modelos que, sin dejar de serlo, se acerquen y reflejan mejor la realidad. Marx diría, siguiendo a Hegel, *elevarse* de lo abstracto a lo concreto. La ventaja de Sraffa es que nos da el basamento de todo ello porque parte de tres hipótesis y/o principios que parecen inexcusables: el grado de libertad entre salarios y ganancias, la formación de los precios a partir de un margen sobre los costes y el capital como trabajo fechado. A partir de esto pueden venir Keynes, Kalecki, Marx y hasta Ricardo en retrospectión. A

partir de Sraffa y su visión del excedente se puede reconstruir la teoría del excedente y, desde la teoría del excedente, abordar los problemas y algunas (de forma selectiva) de las teorías explicativas desarrolladas hasta nuestros días.

Sin más dilación vamos a ver ahora algunos aspectos del uso de esas matemáticas según la lógica expositiva de *Producción de mercancías por medio de mercancías* y no según el orden de sus descubrimientos, porque sabemos que ambos no fueron en paralelo, cosa que normalmente ocurre y de lo que ya advirtió Kuhn al distinguir entre la lógica del descubrimiento y la lógica de la exposición en la historia de la ciencia, entre la filogénesis y la ontogénesis de la lógica científica. Dicho de otra forma, vamos a ver la ontogénesis del uso expositivo del instrumento lógico y no la filogénesis de su invención. Para este fin han aparecido otros textos¹⁰⁸. No obstante y como siempre ocurre, no hay mejor forma de escudriñar la ontogénesis que pasear intelectualmente por la filogénesis, ver los avances y retrocesos del autor, sus dudas, sus consultas a –en este caso– sus amigos matemáticos y cómo antepuso siempre su intuición y el criterio económico a la mera y fría precisión matemática. Sraffa antepuso siempre el caballo de la lógica económica al carro de la lógica formal y por eso, a pesar de algunos errores, llegó tan lejos.

Madrid, 21 de enero de 2012.

¹⁰⁸ *Besicovitch, Sraffa and the existence de la Standard commodity*, N. Salvadori, 2010. http://host.uniroma3.it/eventi/sraffaconference2010/abstracts/pp_salvadori.pdf
Sraffa on Bortkiewicz. Reconstructing the Classical Theory of Value and Distribution, 2006.
<https://docs.google.com/viewer?a=v&pid=sites&srcid=ZGVmYXVsdGRvbWFpbnxiaWJsaW90ZWNhZ2x8Z3g6MzNkZjM3MzFIZTBmZDdmNg>
Sraffa and the mathematicians: Frank Ramsey and Alister Watson, Kurz y Salvadori.
On the collaboratin between Sraffa and Besicovitch: The proof of gradiente, Kurz y Salvadori, en la obra colectiva *Sraffa: on an alternative economics*, 2008, edit Palgrave MacMillan.
Sraffa 1926 and Sraffa 1960: an attempt to bridge the gap, Sergio Nisticó, ídem anterior.

Bibliografía

Bortkiewicz, L.: "Sobre la transformación de valores a precios en el tercer libro de "El Capital" de K. Marx", https://3794801810983261946-a-1802744773732722657-s-sites.googlegroups.com/site/revistacircus/Home/bortkiewicz_sobrelatransformacion.pdf?attachauth=ANoY7crIjmuwc64DorHmHstfUVCjid0MpF32ejdwrX78r4VAO_bzPXgdPi340ubeCMRSI9zkiMRUoXzG9Z5OJs_h0C5CwlGsAL0zJH_F9uoDXy2Gw6WZRH1qqQU2YLEsLsOWnOmh0ybtbhBAa2scAzDpO4fo81x8v-N6SWKINwDwzs9VEFsWfWYIjg-Ov3pmtg8CBgrLW3smZgNL-vU-iySSu0EV9hvzDSTH4-74kP8B482Aw073sBc%3D&attredirects=0

Bour, Enrique A.: "Marx y la teoría económica moderna", 2007
<http://www.aaep.org.ar/anales/works/works2007/bour.pdf>

Desai, M.: "Marxian Economic Theory", 1974 [*Lecciones de teoría económica marxista*, 1977, edit. Siglo XXI].

Dobb, M.: "Teoría del valor y de la distribución desde Adam Smith", edit. Siglo XXI editores.

Garegnani, P.: "El capital en la teoría de la distribución", 1982, ed. Oikos-Tau ("Il capitale nelle teorie delladistribuzione", 1982)

Garegnani, P.: "Heterogeneous Capital, The Production Function and the Theory Distribution", 1970

Harcourt, G.C.: "Teoría del Capital" (*Some Cambridge controversies in the theory of capital*, 1975), apéndice al cap. 4, 1975, edit. Oikos-tau.

Korsch, Karl; "Karl Marx", 1975, traducción de Manuel Sacristán, edit. Ariel.

Kurz, D. Heinz; Salvadori, Neri: "Theory of Production", 1997.

Kurz, Schefold, Salvadori: "Sraffa or an alternative economics", 2008, ed. Palgrave Macmillan.

Lange, O., Taylor, F. M.: "On tthe Economic Theory of Socialism", 1938 [*Sobre la teoría económica del socialismo*, 1971, edit. Ariel]

Marx, Carlos: "El método en la Economía Política", 1974, Ediciones Grijalbo, S.A.

Marx, Carlos: "El Capital", en el FCE, traducción de Wenceslao Roces.

Meade, J.: "A neo Classical Theory of Economic Growth", 1961.

Meek, R.: "Mr. Sraffa's Rehabilitation of Classical Economics", 1961.

- Mendoza, Gabriel: "La transformación de valores en precios de producción", 1997
http://www.izt.uam.mx/economiatyp/numeros/numeros/10/articulos_PDF/10_2_La_transformacion.pdf
- Mora Plaza, A.: "Aspectos de la economía de Sraffa", revista: Nómadas, n. 23, U. Complutense de Madrid, enlace: <http://www.ucm.es/info/nomadas/23/antoniomora.pdf>
- Mora Plaza, A.: "Notas sobre la producción simple y conjunta a consecuencia de Sraffa":
<http://redalyc.uaemex.mx/pdf/181/18112179020.pdf>;
- Mora Plaza, A.: "Sobre la transformación de valores a precios":
<http://www.eumed.net/ce/2009b/amp2.htm>
<http://revistas.ucm.es/cps/15786730/articulos/NOMA1010140379A.PDF>
- Mora Plaza, A.: "Notas sobre el teorema fundamental marxiano"
<http://www.eumed.net/ce/2009b/amp.htm>
http://econpapers.repec.org/article/ervcontri/y_3a2009_3ai_3a2009-10_3a22.htm
- Mora Plaza, A.: "Descifrando a Sraffa", Editorial Académica Española, 2011.
- Morhisima, M.: "La teoría económica de Marx" (*Marx's Economics*, 1973), 1977, pág. 15, edit. Tecnos.
- Moseley, F.: "El método lógico y el problema de la transformación".
<http://www.azc.uam.mx/publicaciones/etp/num7/a8.htm>
- Nuti, D.: "Capitalism, Socialism and Steady Growth", 1970.
- Okishio, N.: "A mathematical note on marxian theorems", 1963.
- Pasinetti, L.: "Critical of the neoclassical theory of growth and distribution". Está en la red:
http://www.unicatt.it/docenti/pasinetti/pdf_files/Treccani.pdf
- Pasinetti, L.: "Lecciones de teoría de la producción" (*Lezioni di teoria della produzione*), 1975), 1983, FCE.
- Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.
- Robinson, J.: "Ensayos críticos", 1984, Ediciones Orbis.
- Roncaglia, Alessandro: "La riqueza de las ideas", Prensas Universitarias de Zaragoza, 2009 (*The Wealth of Ideas. A History of Economic Thought*, Cambridge University Press, 2005).
- Samuelson, Paul: "Understanding the Marxian notion of Exploitation", 1971.

Schumpeter, J. A.: "Historia del Análisis Económico" (*History of Economic Analysis*, 1954), 1971, Ediciones Ariel.

Steedman, I.: "Marx, Sraffa y el problema de la transformación" (*Marx after Sraffa*, 1977), 1985, F.C.E.

Spaventa, L.: "Apuntes de Economía Política", edit. Ariel, 1984-

Subiza Martínez, B.: "Juegos matriciales y su aplicación a la teoría Perron-Frobenius", U. de Alicante; http://www.ine.es/revistas/estaespa/112_3.pdf

Sraffa, Piero: "Producción de mercancías por medio de mercancías" (*Production of commodities by means commodities*, 1960), 1975, Oikos-Tau.

Ricardo, D.: "Principios de Economía Política y Tributación" (*On the Principles of Political Economy and Taxation*), 1973, F.C.E.

Vegara, J. M.: "Economía política y modelos multisectoriales", 1979, edit. Tecnos.

Varios: "Matemáticas avanzadas aplicadas a la Economía", UNED, 2001.